

DIFFÉRENTIELLES À SINGULARITÉS PRESCRITES

QUENTIN GENDRON AND GUILLAUME TAHAR

ABSTRACT. We study the local invariants that a meromorphic k -differential on a Riemann surface of genus $g \geq 0$ can have. These local invariants are the orders of zeros and poles, and the k -residues at the poles. We show that for a given pattern of orders of zeroes, there exists, up to a few exceptions, a primitive k -differential having these orders of zeros (see Theorem 1.4). The same is true for meromorphic k -differentials and in this case, we describe the tuples of complex numbers that can appear as k -residues at their poles. For genus $g \geq 2$, and even $g = 1$ if $k \neq 2$, it turns out that every expected tuple appears as k -residues (see Theorem 1.1). On the other hand, some expected tuples are not the k -residues of a k -differential in some remaining strata. This happens for $k = 1$ or $k \geq 3$ in genus zero for a finite number (up to simultaneous scaling) of them. The abelian case is particularly interesting since the missing possibilities are either the zero tuple or special collinear numbers (see Theorem 1.5). In the quadratic differentials cases, we show that one tuple can not be obtained in four families of strata in genus 1 (see Theorem 1.2). In genus zero, up to a 2-dimensional locus can be impossible to realise as residue of quadratic differentials in some strata (see in particular Theorem 1.13). We also give consequences of these results in algebraic and flat geometry.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Boîte à outils	8
3. Différentielles abéliennes méromorphes	13
4. Pluridifférentielles en genre zéro	22
5. Pluridifférentielles en genre supérieur.	44
6. Applications.	58
Références	60

1. INTRODUCTION

Soient X une surface de Riemann de genre g et K_X son fibré en droites canonique. Les sections méromorphes de K_X sont les *différentielles abéliennes* de X et les sections du produit tensoriel $K_X^{\otimes k}$ sont les *pluridifférentielles* ou *k -différentielles* de X . Localement, une k -différentielle s'écrit $f(z)(dz)^k$, où f une fonction méromorphe.

Il est bien connu (voir par exemple [Sai10, Encadré III.2]) que les invariants en un point P d'une différentielle abélienne ω sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *résidu* $\text{Res}_P(\omega)$ de celle-ci dans le cas où P est un pôle de ω . Ce résultat a été étendu au cas des différentielles quadratiques dans [Str84] et à toutes les pluridifférentielles dans [BCGGM16b]. Plus précisément, les invariants en P d'une pluridifférentielle ξ sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *k -résidu* $\text{Res}_P^k(\xi)$, si P est un pôle de ξ .

Ces invariants ne peuvent pas être fixés arbitrairement mais vérifient certaines relations. Tout d'abord le k -résidu d'un pôle d'ordre $-k$ est toujours non nul alors que le k -résidu d'un pôle dont l'ordre n'est pas divisible par k est toujours nul. Ensuite, la somme des

Date: 9 mai 2017.

Key words and phrases. Abelian differential, Flat surface, Residue, k -differentials.

ordres des zéros et des pôles d'une k -différentielle est égale à $k(2g - 2)$. Enfin, dans le cas des différentielles abéliennes, la somme des résidus s'annule.

Il existe deux théorèmes célèbres donnant l'existence de pluridifférentielles méromorphes avec des certaines conditions locales.

Le premier est le théorème de Riemann-Roch (voir [Rey89, Théorème 9.3]) qui permet d'obtenir certaines pluridifférentielles avec des ordres fixés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les résidus de ces pluridifférentielles. De plus, il est souvent délicat d'en déduire des résultats pour tous les ordres que nous pouvons considérer. Par exemple, les résultats d'existence les plus fins que nous ayons (voir [MS93] et [Dia00] dans le cas abélien et quadratique respectivement dans le cas holomorphe et méromorphe et [Tro86] pour les k -différentielles holomorphes) ne font que peu appel à des résultats algébriques.

Le second théorème est le théorème de Mittag-Leffler (voir [Rey89, Proposition 9.3]) qui donne l'existence de différentielles avec l'ordre des pôles et les résidus correspondants imposés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les zéros de ces différentielles.

Dans cet article, nous nous proposons de répondre à la question suivante.

Étant donnés les ordres des zéros et pôles ainsi que les résidus aux pôles, existe-il une pluridifférentielle (primitive) ayant ces invariants locaux ?

Définitions. Afin de préciser la question centrale, nous introduisons un certain nombre de notions. Nous dénoterons par

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$$

une partition de $2g - 2$ qui contient s fois -1 , où les a_i sont des nombres strictement positifs et les b_i sont supérieurs à 2 et. De même, les partitions de $k(2g - 2)$ seront dénotées

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s)),$$

où les a_i sont supérieurs à $-k + 1$, les $b_i := kl_i$ sont supérieurs à $2k$ et divisibles par k , les c_i sont supérieurs à k et non divisibles par k et qui contient s fois $-k$. La strate primitive $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitive de type μ . Il est bien connu que dans le cas abélien, les strates $\Omega \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -1)$ sont vides. Dans la suite nous ne considérerons que des partitions de $2g - 2$ distinctes de celles-ci.

Il est bien connu que le résidu d'une différentielle ω à un pôle simple est non nul et que la somme des résidus de ω est nulle. Donc si $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ est une strate abélienne, on définit l'espace résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}(\mu) := \left\{ (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^s : \sum_{i=1}^{p+s} r_i = 0 \right\}. \quad (1.1)$$

Cet espace paramètre l'ensemble des résidus que peut prendre une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$.

Dans le cas des k -différentielles pour $k \geq 2$, la description change quelque peu. Nous rappelons tout d'abord la notion de k -résidu. Plus de détails sont donnés dans [BCGGM16b, Section 3]. Au voisinage de chaque point P de X , il existe une coordonnée z telle que une k -différentielle ξ est de la forme

$$\begin{cases} z^m (dz)^k & \text{si } m > -k \text{ ou } k \nmid m, \\ \left(\frac{r}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m = -k, \\ \left(z^{m/k} + \frac{t}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m < -k \text{ et } k \mid m, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $t \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{C}^*$. Les nombres r et t sont définis à une racine de l'unité près. Le k -résidu de ξ en P est la puissance k ième de r dans le second cas, la puissance k ième de t dans le troisième cas et zéro sinon. Ainsi, le k -résidu est non nul dans le cas des pôles d'ordre $-k$ et peut ne pas être nul uniquement dans le cas des pôles d'ordre divisible par k . Toutefois

il n'existe pas de théorème des résidus pour les pluridifférentielles. Ainsi étant donné une strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$, nous définissons l'espace résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}^k(\mu) := \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^s. \quad (1.3)$$

Cet espace paramètre les résidus que peut prendre une pluridifférentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$.

Dans tous les cas, l'application résiduelle est donnée par

$$\mathfrak{R}^k(\mu) : \Omega^k \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}^k(\mu) : (X, \xi) \mapsto (\text{Res}_{P_i}^k(\xi)), \quad (1.4)$$

où les P_i sont les pôles de ξ d'ordre divisible par k . Insistons sur le fait que par définition, les pluridifférentielles de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ sont *primitives*.

Dans [BCGGM16b], il est montré que l'application résiduelle est dominante et que ces fibres sont de dimension $2g - 1 + n$ dans le cas abélien et $2g - 2 + n$ dans le cas des pluridifférentielles. Le but de cet article est de déterminer l'image de cette application pour chaque strate.

Genre supérieur à un. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats centraux de cet article. Rappelons que $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles *primitive* de type μ . Nous donnons d'abord le cas du genre supérieur ou égale à deux.

Théorème 1.1. *Si $g \geq 2$ et μ contient un élément inférieur à $-k$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}^k(\mu) : \Omega^k \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}^k(\mu)$ est surjective.*

Le cas des strates de genre un est un peu plus complexe. En effet, il existe quatre familles de strates quadratiques exceptionnelles.

Théorème 1.2. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_1(\mu)$ une strate de genre un et μ une partition de $k(2g - 2)$ contenant un élément inférieur à $-k$.*

- i) Si $k = 2$ et $\mu = (4a; (-4^a))$ ou $\mu = (2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$, alors l'image de $\mathfrak{R}^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*
- ii) Si $k = 2$ et $\mu = (2s; (-2^s))$ ou $\mu = (s - 1, s + 1; (-2^s))$ avec s pair, alors l'image de $\mathfrak{R}^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}^2(\mu) \setminus \{(1, \dots, 1)\}$.*
- iii) Sinon l'application résiduelle $\mathfrak{R}^k(\mu)$ est surjective.*

En général, les strates de k -différentielles ne sont pas connexes. Les composantes connexes dans le cas abélien ont été classifiées par [Boi15]. Nous étendons les résultats précédents à chaque composante connexe des strates abéliennes.

Proposition 1.3. *Étant donnée une composante connexe S d'une strate de différentielles abéliennes $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ avec $g \geq 1$. La restriction à S de l'application résiduelle de $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ est surjective.*

Enfin nous traitons le cas des strates de différentielles n'ayant que des singularités d'ordre strictement supérieur à $-k$. Ces différentielles correspondent à des surfaces euclidiennes à singularité conique d'aire fini. Notre théorème 1.4 généralise le résultat de [MS93] qui n'avaient considéré que les cas abélien et quadratique. Il permet également de préciser [Tro86] qui ne se souciait pas de la primitivité des k -différentielles.

Théorème 1.4. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n)$ une partition de $k(2g - 2)$ telle que les a_i soient strictement supérieurs à $-k$. La strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramétrant les différentielles primitives de profil μ est vide si et seulement si*

- i) $\mu = (1, -1)$,*
- ii) $\mu = \emptyset$ et $k \geq 2$,*
- iii) $k = 2$ et $\mu = (4)$ ou $\mu = (3, 1)$.*

Différentielles abéliennes en genre zéro. Pour de nombreuses strates de genre zéro, l'application résiduelle n'est pas surjective. Nous discutons le cas des différentielles abéliennes.

Théorème 1.5. Soient $g = 0$, $k = 1$ et $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$. L'un des cas suivants est vérifié.

i) Si $s = 0$ et il existe un indice i tel que

$$a_i > \sum_{j=1}^p b_j - (p + 1), \quad (1.5)$$

alors l'image de $\mathfrak{R}(\mu)$ est $\mathcal{R}(\mu) \setminus \{0\}$.

ii) S'il n'y a que des pôles simples (i.e. $p = 0$), alors l'image de $\mathfrak{R}(\mu)$ est décrite dans les propositions 1.6 et 1.7.

iii) Dans les autres cas, l'application résiduelle $\mathfrak{R}(\mu)$ est surjective.

Nous décrivons maintenant l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s - 2; (-1^s))$. Pour cela nous définissons le graphe suivant. Un *graphe de connexions* est un arbre bipartite connexe Γ , dont les sommets sont partitionnés en $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ et ont des poids réels strictement positifs, tels que :

- i) la somme des poids des sommets de Γ_+ est égale à celle des poids des sommets de Γ_- ;
- ii) considérons l'opération qui consiste à retirer une feuille et soustraire le poids de ce sommet à celui qui lui est relié. Si on applique cette opération entre une et le nombre d'arêtes moins une fois à Γ , alors on obtient des graphes dont les poids aux sommets sont strictement positifs.

Si les nombres r_1, \dots, r_s sont colinéaires de somme nulle, alors un *graphe associé aux r_i* est un arbre bipartite connexe vérifiant les propriétés suivantes. Étant donné $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que $r'_i := \alpha r_i \in \mathbf{R}^*$ pour tout $i \leq s$. Les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont en bijection avec le nombre de r'_i positifs (resp. négatifs). Le poids du sommet correspondant à r_i est r'_i .

Proposition 1.6. Soit $\Omega\mathcal{M}_0(s - 2; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et un unique zéro d'ordre $s - 2$. Les résidus (r_1, \dots, r_s) sont dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si l'une des propriétés est satisfaite.

(1) Les résidus ne sont pas colinéaires.

(2) Il existe un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexion.

Nous montrerons dans la proposition 3.1 que les s -uplets (r_1, \dots, r_s) qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}(s - 2; (-1^s))$ sont en nombre fini (modulo multiplication par une constante) pour tout $s \geq 2$. De plus, dans ce cas les r_i sont commensurables entre eux.

Le cas des strates ayant plus de zéros est un peu moins explicite. Afin de décrire l'image de l'application résiduelle, nous faisons appel à la notion de différentielle stable rappelée dans la section 2.

Proposition 1.7. Soit $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et n zéros. Le s -uplet (r_1, \dots, r_s) est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement s'il existe une différentielle stable de genre zéro (X, ω) avec un pôle simple à chaque nœud, dont les autres singularités sont d'ordres $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ et qui possède un unique zéro sur chaque composante irréductible de X .

Cette proposition permet donc d'étudier l'image de l'application résiduelle en se ramenant au cas d'un zéro. De plus, cette condition peut se reformuler en terme de graphes munis de poids. Nous le ferons dans la section 3 et donnerons des exemples.

Pluridifférentielles en genre zéro. Le cas des pluridifférentielles en genre zéro présente de nombreuses difficultés. En particulier, il existe des strates pour lesquelles le complémentaire de l'image de l'application résiduelle est de dimension 1 ou 2 (modulo dilatations).

Rappelons qu'étant donnée une partition

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$$

de $-2k$, l'espace $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . On commence par remarquer (cf lemme 4.1) que ces strates sont non vides si et seulement si $\text{pgcd}(\mu, k) = 1$. Dans la suite, cette condition sera toujours implicitement satisfaite.

Dans le cas où $r \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.8. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p; c_1, \dots, c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est*

- i) $\mathcal{R}(\mu) \setminus \{0\}$ si $r = 1$ et $s = 0$ et $n = 1$,
- ii) $\mathcal{R}(\mu)$ sinon.

Nous donnons maintenant la description des strates pour $r = 0$ et $p \neq 0$. S'il y a des pôles d'ordres $-k$, on a la description suivante.

Théorème 1.9. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p; (-k^s))$ avec $s \neq 0$ est surjective sauf dans les cas exceptionnels suivants.*

- i) L'image de $\mathfrak{R}^2(4s' - 1; 4s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ est $\mathcal{R}^2(\mu) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$.
- ii) L'image de $\mathfrak{R}^2(2a - 1; 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ est $\mathcal{R}^2(\mu) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$.

Dans le cas où $r = s = 0$ et $p \neq 0$, on obtient la description suivante.

Théorème 1.10. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une strate non vide de genre zéro.*

L'image de l'application résiduelle de cette strate contient $\mathcal{R}(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ à l'exception des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4p' - 3, 4p' - 1; (-4^{2p'}))$ où elle contient $\mathcal{R}(\mu) \setminus \mathbf{C} \cdot (1, \dots, 1)$.

Si $p = 1$, alors le p -uplet $(0, \dots, 0)$ est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si $n \geq 3$.

Si $p \geq 2$ et $n = 2$, alors $(0, \dots, 0)$ pas dans l'image de l'application résiduelle.

Si $p \geq 2$ et $n = 3$, nous donnons une condition sur l'appartenance du p -uplet $(0, \dots, 0)$ à l'image de l'application résiduelle dans la proposition 4.8.

Dans cette proposition, nous n'avons pas traité le cas $p \geq 2$ et $n \geq 4$. Il est similaire au cas $n = 3$, mais la complexité de la condition dans ce cas la rend peu applicable.

Enfin nous donnons la description de l'image par l'application résiduelle des strates telles que $p = r = 0$. Le cas des différentielles quadratiques est très différent du cas des k -différentielles d'ordre $k \geq 3$. Obtenir une caractérisation précise du cas quadratique nécessiterait un autre travail. Nous donnons toutefois un certain nombre de résultats partiels intéressants. Dans les cas où il y a plus de trois zéros, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 1.11. *L'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ est surjective dans les deux cas suivants.*

- 1) $n \geq 4$ et au moins quatre a_i sont impairs.
- 2) $n = 3$ et $a_1 + a_2 < a_3$ avec a_3 pair.

Dans le cas des strates avec deux zéros, la description est très complexe. Si les résidus quadratiques sont sur le même rayon réel issu de l'origine, on pourrait utiliser des graphes de connexion généraliser. Toutefois, la combinatoire devient très complexe et il semble difficile de tirer des informations d'une telle description. On pourra toutefois consulter la proposition 4.17 dans le cas où $a_1 = -1$. Dans ces strates, le concept suivant est important pour comprendre l'application résiduelle.

Définition 1.12. Des nombres R_1, R_2, R_3 sont *triangulaires* s'il existe des racines carrées r_1, r_2, r_3 de ces nombres telles que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

On a alors le résultat surprenant suivant.

Théorème 1.13. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ contient tous les s -uplets n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine sauf dans les deux cas suivants.*

- i) L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s-1, 2s+1; (-2^{2s'+2}))$ ne contient pas les 2-résidus proportionnels à $(1, \dots, 1, R, R)$ pour tout $R \in \mathbf{C}^*$.*
- ii) L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s'-1, 2s'-1; (-2^{2s'+1}))$ ne contient pas les résidus quadratiques proportionnels à $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_3)$ où les R_i sont triangulaires.*

Maintenant, nous considérons les strates de k -différentielles pour $k \geq 3$. Mis à part les strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$, toutes les exceptions proviennent du fait que les racines k ème de l'unité engendrent un réseau de \mathbf{C} si et seulement si $k \in \{3, 4, 6\}$.

Théorème 1.14. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -k^s)$ est surjective pour $k \geq 3$ sauf dans les cas suivants.*

- (1) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$ est égale à l'espace $(\mathbf{C}^*)^2 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, (-1)^k)$.*
- (2) *L'image de $\mathfrak{R}^6(-1, 7; -6^3)$ est égale à $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, 1)$.*
- (3) *L'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 9; -4^4)$ et de la strate $\Omega^6 \mathcal{M}_0(-1, 13; -6^4)$ est égale à $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, 1, 1)$.*
- (4) *L'image de $\mathfrak{R}^4(5, -1; -4^3)$ est égale à $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, -4)$.*
- (5) *L'image de $\mathfrak{R}^3(-1, 4; -3^3)$ est égale à $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, 1) \cup \mathbf{C}^* \cdot (1, -1, 3i\sqrt{3})$.*
- (6) *L'image de $\mathfrak{R}^3(1, 2; (-3^3))$ est $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, 1)$.*
- (7) *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 5; (-4^4))$ est $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^4)$.*
- (8) *L'image de $\mathfrak{R}^3(2, 7; (-3^5))$ est $(\mathbf{C}^*)^5 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^5) \cup \mathbf{C}^* \cdot ((1^4), -1)$.*
- (9) *L'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 13; (-4^6))$ et de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(5, 7; (-3^6))$ est $(\mathbf{C}^*)^6 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^6)$.*
- (10) *L'image de $\mathfrak{R}^3(2, 4; (-3^4))$ est $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, -1, -1)$.*
- (11) *L'image de $\mathfrak{R}^3(2, 10; (-3^6))$ est $(\mathbf{C}^*)^6 \setminus \mathbf{C}^* \cdot ((1^3), (-1^3)) \cup \mathbf{C}^* \cdot (1^6)$.*

Applications. Nous donnons maintenant quelques applications de nos résultats. Ils fournissent des informations intéressantes couplés avec les théorèmes de [BCGGM16a] et [BCGGM16b]. Ces travaux décrivent un bord des strates de k -différentielles via le concept de *différentielles entrelacées* (voir section 2). Afin de savoir si une différentielles entrelacée est au bord d'une strate donnée, on a besoin de connaître l'existence de différentielles où l'on connaît les ordres des zéros et des pôles ainsi que des résidus de différentielles. Notre article peut donc être vu comme la dernière pierre dans cette description ensembliste du bord des strates.

La première conséquence est un résultat sur la géométrie de l'espace des modules des courbes pointées. Notons que la première des deux assertion a été prouvée par Eisenbud et Harris dans [EH87, Theorem 3.1] à l'aide des séries linéaires limites.

Proposition 1.15. *Soit $\overline{\mathfrak{W}}_g$ la fermeture dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ du lieu paramétrant les points de Weierstraß des courbes algébriques de genre g .*

- i) $\overline{\mathfrak{W}}_g$ ne rencontre pas le lieu des courbes stables où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué.*

ii) $\overline{\mathfrak{W}}_g$ intersecte le lieu où $g-1$ courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué et l'une de ces courbes elliptiques est attachée par deux points au \mathbb{P}^1 .

Nous donnons maintenant une application dans l'esprit de la géométrie plate. Cette proposition est connue dans le cas abélien [EMZ03] et quadratique [Lan08].

Proposition 1.16. *Soient ξ une k -différentielle et z_0 une singularité d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Il est pas possible de scinder localement z_0 en t singularités d'ordres $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ avec $a_0 = \sum \alpha_i$ et $\alpha_i > -k$ si et seulement si $k \geq 2$, $t = 2$, $k \mid a_0$ et $k \nmid \text{pgcd}(\alpha_i)$.*

Nous donnons maintenant une application à la géométrie des surfaces plates d'aire finie. Naveh [Nav08] a montré que dans une strate de différentielles abéliennes, le nombre maximal de cylindres disjoints pour une surface donnée est $g+n-1$ et que cette borne est toujours atteinte. Nous décrivons les vecteurs d'holonomie que peuvent avoir les géodésiques périodiques de ces cylindres.

Proposition 1.17. *Soient $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$. Il existe une différentielle dans S avec t cylindres disjoints dont les circonférences sont $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ si et seulement s'il existe une différentielle stable (X, ω) avec un pôle simple aux t nœuds, telle que les résidus à ces nœuds sont $\pm\lambda_i$ et dont les ordres des autres singularités sont donnés par (a_1, \dots, a_n)*

Nous énoncerons ce résultat dans le langage des graphes dans la section 6.

Organisation de cet article. Le schéma de la preuve de ces théorèmes est le suivant. Dans un premier temps nous utilisons la correspondance entre les (pluri)différentielles méromorphes et certaines classes de surfaces plates introduites par [Boi15] et étudiées dans [Tah16] dans le cas $k=1$ et par [BCGGM16b] dans le cas $k \geq 2$. Cette correspondance nous permet de construire explicitement des pluridifférentielles ayant les propriétés souhaitées lors que le genre et le nombre de singularités sont petits.

Dans un second temps, ce résultat nous déduisons les autres cas grâce à deux opérations introduites par [KZ03] pour $k=1$, [Lan08] pour $k=2$ et généralisées par [BCGGM16b] pour $k \geq 3$. Ces deux opérations sont l'éclatement d'une singularité et la couture d'anse. La première de ces opérations permet d'augmenter le nombre de singularités sans changer le genre d'une pluridifférentielle. La seconde préserve le nombre de singularités mais augmente le genre de la surface sous-jacente.

Enfin, dans les cas où l'application résiduelle n'est pas surjective, nous développons des méthodes ad-hoc afin de montrer la non-existence de pluridifférentielles ayant certains invariants locaux.

L'article s'organise comme suit. Pour terminer cette introduction, nous posons quelques conventions. Dans la section 2 nous faisons les rappels nécessaires sur les représentations plates des pluridifférentielles méromorphes et sur les deux opérations précédemment citées. De plus, nous introduisons dans cette section les briques élémentaires qui nous permettront de construire les pluridifférentielles avec les propriétés souhaitées. La section 3 est dédiée aux différentielles abéliennes. La section 4 est dédiée au cas des pluridifférentielles de genre 0. La section 5 est dédiée aux cas des pluridifférentielles de genre supérieur à 1. Enfin dans la section 6, nous donnons quelques applications de nos résultats.

Nous conseillons au lecteur pressé de restreindre sa lecture aux sections 2, 3 et 6.

Conventions. Dans cet article nous définirons le résidu d'une forme différentielle comme étant le résidu usuel multiplié par la constante $2i\pi$. En particulier, le théorème des résidus s'énonce

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \text{Res}_{P_i} \omega,$$

où les P_i sont les pôles de ω encerclés par γ . De plus, pour une k -différentielle, le k -résidu sera $(2i\pi)^k$ fois le k -résidu défini par l'équation (1.2). Remarquons que ces conventions n'ont aucune incidence sur l'énoncé des résultats, mais rend les preuves plus agréables.

Pour une k -différentielle ξ , nous appelons *zéro* une singularité de ξ d'ordre strictement supérieur à $-k$ et *pôle* une singularité d'ordre inférieur à $-k$. Le k -résidu d'une k -différentielle sera noté avec une lettre majuscule R tandis qu'une racine k ième de R sera notée par une lettre minuscule r . Cette convention de langage peut paraître curieuse, mais sera extrêmement commode.

Si une strate paramètre des différentielles avec m singularités égales à a , alors nous noterons cela (a^m) . Par exemple $\Omega\mathcal{M}_3(3, 3; -1, -1)$ pourra être notée $\Omega\mathcal{M}_3((3^2); (-1^2))$. Plus généralement, si nous considérons une suite (a, \dots, a) de m nombres complexes tous identiques, nous noterons cette suite (a^m) . Nous espérons que ces notations seront claires par le contexte.

Remerciements. Nous remercions Corentin Boissy pour des discussions enrichissantes liées à cet article. Une question de David Auricino est à l'origine de la Proposition 1.17. Le logiciel *GeoGebra* a procuré une aide substantielle au premier auteur.

2. BOÎTE À OUTILS

Dans cette section, nous introduisons les objets et les opérations à la base de nos constructions. Nous commençons par quelques rappels sur les pluridifférentielles dans la section 2.1. Ensuite nous introduisons dans la section 2.2 les briques élémentaires de nos constructions. Nous poursuivons par un rappel sur les différentielles entrelacées et les opérations de scindage de zéro et de couture d'anse dans la section 2.3. Enfin nous discuterons un cas spécial de surfaces plates dans la section 2.4.

2.1. Pluridifférentielles méromorphes. Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats élémentaires sur les pluridifférentielles méromorphes et de leur relation avec les surfaces plates. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Boi15] pour les différentielles abéliennes et [BCGGM16b] pour les k -différentielles avec $k \geq 1$.

Soit X une surface de Riemann de genre g et ω une section méromorphe du fibré canonique K_X . On notera Z les zéros et P les pôles de ω . L'intégration de ω sur $X \setminus P$ induit une structure plate sur $X \setminus P$. Les zéros de ω d'ordre a correspondent à une singularité conique d'angle $(a - 1)2\pi$ de la structure plate. Les pôles simples de ω correspondent à des demi-cylindres infini. Les pôles d'ordre $b \geq 2$ correspondent à un revêtement de degré $b - 1$ du plan dans lequel on a éventuellement fait une entaille correspondant au résidu. Inversement, une surface plate obtenue en attachant par translation un nombre fini de demi-cylindres infinis, des revêtements d'ordre $b - 1$ du plan entaillé et des polygones correspond à une différentielle abélienne méromorphe sur une surface de Riemann.

Une théorie similaire a été développée dans le cas des sections méromorphes ξ de la puissance tensorielle k ième K_X^k du fibré canonique de X . En effet, on peut passer au revêtement canonique $\pi : \widehat{X} \rightarrow X$ et choisir une racine k ième $\widehat{\omega}$ de $\pi^*\xi$ sur \widehat{X} . L'intégration de $\widehat{\omega}$ le long d'un chemin de \widehat{X} nous fournit une structure plate sur \widehat{X} . La surface plate ainsi obtenue possède une symétrie cyclique d'ordre k provenant de la structure de revêtement. Le quotient de cette surface par ce groupe est une surface plate où l'on autorise les identifications par des translations et par des rotations d'angle multiple de $\frac{2\pi}{k}$. Les pôles d'ordre $-k$ correspondent à des demi-cylindres infinis et les pôles d'ordre $-b < -k$ à un revêtement d'ordre $b - k$ d'un domaine angulaire d'angle $\frac{2\pi}{k}$. Les pôles d'ordres $0 > a > -k$ correspondent aux singularités coniques d'angle $(a + k)\frac{2\pi}{k}$. Cela explique la convention de langage que les singularités d'ordre $a \geq -k + 1$ sont des *zéros* d'ordre a de ξ .

Enfin, pour les k -différentielles non primitives, on a la propriété suivante. Si la k -différentielle ξ est la puissance d ième d'une (k/d) -différentielle η , alors pour tout pôle P

$$\text{Res}_P^k(\xi) = \left(\text{Res}_P^{k/d}(\eta) \right)^d. \quad (2.1)$$

2.2. Briques élémentaires. Dans ce paragraphe, nous introduisons des surfaces plates à bord qui nous serviront de briques pour construire les pluridifférentielles ayant les propriétés locales souhaitées.

Nous décrivons dans un premier temps les briques pour les différentielles abéliennes. La base de nos constructions seront les *domaines basiques* introduit par [Boi15]. Étant donné des vecteurs (v_1, \dots, v_l) dans $(\mathbf{C}^*)^l$. Nous considérons la ligne brisée L dans \mathbf{C} donnée par la concaténation d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_- , des v_i pour i croissant et d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_+ . Nous supposons que les v_i sont tels que L ne possède pas de points d'auto-intersection.

Le *domaine basique positif* (resp. *negatif*) $D^+(v_i)$ (resp. $D^-(v_i)$) est le demi-plan des nombres complexes au dessus (resp. en dessous) de L . Étant donné un domaine positif $D^+(v_i)$ et un négatif $D^-(w_j)$, on construit le *domaine basique ouvert à gauche* (resp. *droite*) $D_g(v_i; w_j)$ (resp. $D_d(v_i; w_j)$) en collant par translation les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-).

On se donne maintenant des vecteurs (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$ tels que la concaténation V de ces vecteurs dans cet ordre n'a pas de points d'auto-intersection. De plus, on suppose qu'il existe deux demi-droites parallèles L_D et L_F de vecteur directeur \vec{l} , issues respectivement du point de départ D et final F de V , ne rencontrant pas V et telles que $(\overrightarrow{DF}, \vec{l})$ est une base positive de \mathbf{R}^2 . On définit de même le *domaine polaire* $C(v_i)$ d'ordre 1 associé aux v_i comme le sous ensemble de \mathbf{C} entre V et les demi-droites L_D et L_F quotienté par l'identification de L_D à L_F par translation. Le résidu du pôle simple correspondant est donné par la somme $F - D$ des v_i .

On se donne $b \geq 2$ et $\tau \in \{1, \dots, b-1\}$. Soient $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_\ell)$ des vecteurs de \mathbf{C}^* tels que l'argument (pris dans $]-\pi, \pi])$ des v_i est décroissant, des w_j est croissant. La *partie polaire d'ordre b et de type τ associée* à $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_\ell)$ est la surface plate à bord obtenue de la façon suivante. Prenons l'union disjointe de $\tau - 1$ domaines basiques ouverts à gauche associé à la suite vide, $b - \tau$ domaines basiques ouverts à droite associé à la suite vide. Enfin prenons le domaine positif associé aux v_i et le domaine négatif associé aux w_j . On colle alors par translation la demi-droite inférieure du i ème domaine polaire ouvert à gauche à la demi-droite supérieure du $(i + 1)$ ème. La demi-droite inférieure du domaine $\tau - 1$ est identifiée à la demi droite de gauche du domaine positif. La demi-droite de gauche du domaine négatif est identifiée à la positive du premier domaine ouvert à gauche. On procède de même à droite. La figure 1 illustre cette construction.

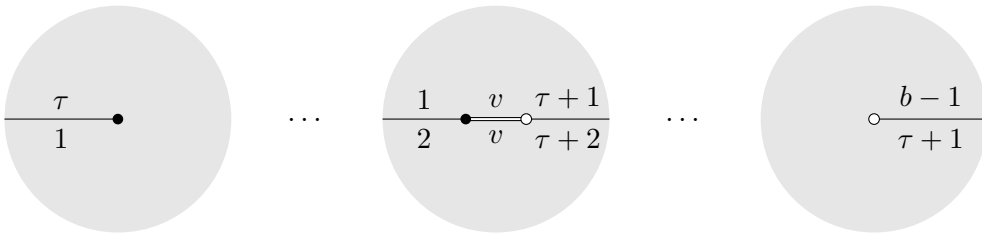


FIGURE 1. Une partie polaire d'ordre b de type τ associée à $(v; v)$

Si $\sum v_i = \sum w_j$ nous dirons que cette partie polaire est *triviale*. Dans le cas contraire, nous dirons que la partie polaire est *non triviale*. La figure 2 de gauche illustre une partie polaire non triviale et celle de droite une partie polaire d'ordre 1.

Par le théorème des résidus l'intégration de ω le long d'un lacet fermé γ est égale à la somme des résidus encerclés par γ . En effet, rappelons notre convention que notre résidu est égal à $2i\pi$ fois le résidu usuel. Cela a la conséquence élémentaire mais primordiale pour notre étude.

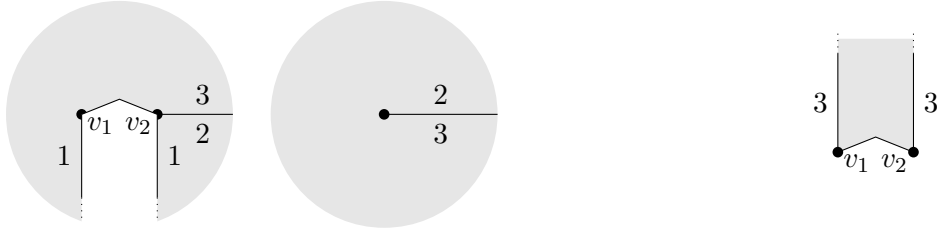


FIGURE 2. Une partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ d'ordre 3 (de type 0) à gauche et d'ordre 1 à droite.

Lemme 2.1. Soient $(v_i; w_j)$ des nombres complexes, le pôle associé à la partie polaire d'ordre b et de type τ associée à $(v_i; w_j)$ à un ordre b et possède un résidu égale à $\sum v_i - \sum w_j$.

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine basique simple associé à v_i est d'ordre 1 et possède un résidu égale à $\sum v_i$.

Nous introduisons maintenant les briques analogues pour les k -différentielles. Les constructions sont très similaires au cas abélien et nous ne donnerons pas les détails.

Étant donné $b := kl$ et des vecteurs $(v_i; w_j)$ comme ci-dessus la k -partie polaire d'ordre kl associée à $(v_i; w_j)$ coïncide avec la partie polaire d'ordre ℓ associée à $(v_i; w_j)$. Cette k -partie polaire permettra de construire des pôles d'ordre kl ayant pour k -résidu $(\sum v_i - \sum w_j)^k$. Lorsqu'il sera clair par le contexte que nous parlons de k -différentielles, nous désignerons la k -partie polaire d'ordre kl simplement par la partie polaire d'ordre kl .

Nous traitons maintenant le cas des pôles d'ordre non divisible par k . Soient $c = \ell k + r$ avec $0 < r < k$ et $\ell \geq 1$. On se donne des vecteurs v_i de \mathbf{C}^* de partie réelle positive. La partie polaire d'ordre c associée aux $(v_1, \dots, v_l; \emptyset)$ est donnée par la construction suivante. Nous concaténons les v_i dans le plan et traçons deux demi-droites issues des points initiaux et finaux de la concaténation telles que l'une corresponde à \mathbf{R}_- et l'angle entre ces deux droites est $-r\frac{2\pi}{k}$. Nous considérons la surface au dessus de cette courbe brisée. Ensuite nous prenons $\ell - 1$ domaines basiques ouvert à gauche associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle $-r\frac{2\pi}{k}$ à la demi droite non horizontale du domaine spécial. Cette construction est illustrée par la figure 3. Similairement, la partie polaire d'ordre c associée aux $(\emptyset; v_1, \dots, v_l)$ est obtenue comme la construction précédente, mais en considérant la surface sous la concaténation des v_i .

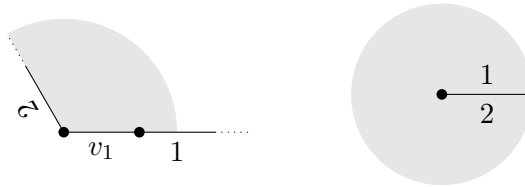


FIGURE 3. La partie polaire d'une 3-différentielle associée à $(v_1; \emptyset)$ d'ordre 7.

Comme précédemment, les résidus d'une k -différentielle ξ peut se lire sur la surface plate correspondante.

Lemme 2.2. Soient $(v_i; w_j)$ des nombres complexes, le pôle obtenu à partir de la partie polaire d'ordre $b = kl$ et de type τ associée à $(v_i; w_j)$ est d'ordre b et possède un k -résidu égale à $(\sum v_i - \sum w_j)^k$.

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine basique d'ordre k associé à v_i est d'ordre $-k$ et possède un k -résidu égale à $(\sum v_i)^k$.

2.3. Pluridifférentielles entrelacées, éclatement de zéros et couture d'anses.

Dans ce paragraphe, nous rappelons certains cas particuliers des résultats obtenus dans [BCGGM16a] et [BCGGM16b] au sujet des différentielles entrelacées. Cela nous permet de rappeler les constructions de l'éclatement des zéros et la couture d'anses.

Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une différentielle entrelacée. Étant donnée une partition $\mu := (m_1, \dots, m_t)$ telle que $\sum_{i=1}^t m_i = k(2g - 2)$. Une k -différentielle entrelacée η de type μ sur une courbe stable n -marquée (X, z_1, \dots, z_t) est une collection de k -différentielles η_v sur les composantes irréductibles X_v de X telle que $\eta_v \neq 0$ et les conditions suivantes sont satisfaites.

- (0) (**Annulation comme prescrit**) Chaque k -différentielle η_v est holomorphe et ne s'annule pas en dehors des nœuds et des points marqués de X_v . De plus, si un point marqué z_i se trouve sur X_v , alors $\text{ord}_{z_i} \eta_v = m_i$.
- (1) (**Ordres assortis**) Pour chaque nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ à $q_2 \in X_{v_2}$,

$$\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -2k.$$

- (2) (**Résidus assortis aux pôles d'ordre $-k$**) Si a un nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ avec $q_2 \in X_{v_2}$ on a $\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} = \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -k$, alors

$$\text{Res}_{q_1}^k \eta_{v_1} = (-1)^k \text{Res}_{q_2}^k \eta_{v_2}.$$

Nous aurons besoin de savoir quand une k -différentielle entrelacée est lissable seulement pour des cas très particuliers. Nous rappelons ici uniquement les cas qui nous intéressent. Le premier cas est celui où l'ordre des k -différentielles à tous les nœuds est égale à $-k$.

Lemme 2.3. *Soit $\eta = \{\eta_v\}$ une k -différentielle entrelacée. Si l'ordre des k -différentielles η_v aux nœuds est $-k$, alors η est lissable localement.*

Notons que dans ce cas, la notion de différentielle entrelacée correspond à la notion classique de différentielle stable. Ainsi nous pourrions nous ramener à ce résultat pour prouver les propositions 1.7 et 1.17.

Maintenant nous regardons le cas des pluridifférentielles entrelacées à deux composantes.

Lemme 2.4. *Supposons que X possède exactement deux composantes X_1 et X_2 reliées par un unique nœud qui identifie $q_1 \in X_1$ à $q_2 \in X_2$. Si $\text{ord}_{q_1} \eta_1 > -k > \text{ord}_{q_2} \eta_2$, alors la k -différentielle torsadée est lissable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k ième d'une différentielle abélienne holomorphe.

De plus, le lissage peut se faire sans modifier les k -résidus de η_1 si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k ième d'une différentielle abélienne méromorphe.

Remarquons que la deuxième partie du lemme n'est pas explicitement prouvée dans [BCGGM16b]. Toutefois, cela peut se montrer sans problèmes en combinant [BCGGM16b, Lemma 4.4] et la preuve du lissage contenue dans cet article.

Maintenant, nous donnons deux applications cruciales du lemme 2.4.

Proposition 2.5 (éclatement d'un zéro). *Soient (X, ξ) une k -différentielle de type μ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ un t -uplet d'entiers strictement supérieurs à $-k$ tel que $\sum_i \alpha_i = a_0$.*

Il existe une opération sur (X, ξ) en z_0 qui fournit une k -différentielle (X', ξ') de type $(\alpha_0, \dots, \alpha_t, \mu \setminus \{a_0\})$ qui ne modifie pas les k -résidus de ξ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) ξ n'est pas la puissance k ème du différentielle abélienne.

ii) Il existe une k -différentielle de genre zéro et de type $(\alpha_1, \dots, \alpha_t; -a_0 - 2k)$ dont le k -résidu au pôle d'ordre $-a_0 - 2k$ est nul.

De plus, si $\xi = \omega^d$ avec ω une différentielle abélienne, alors la k -différentielle ξ' est primitive si et seulement si $\text{pgcd}(\alpha_i, d) = 1$.

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une droite projective avec une différentielle ayant les ordres souhaités. Le lemme 2.4 permet de conclure. C.Q.F.D.

La seconde construction nous permettra en particulier de faire une récurrence sur le genre des surfaces de Riemann.

Proposition 2.6 (Couture d'anse). *Soient (X, ξ) une k -différentielle (primitive) dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ξ . Il existe une opération locale à z_0 qui produit une k -différentielle (X', ξ') dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_{g+1}(a_0 + 2k, \mu \setminus \{a_0\})$.*

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une courbe elliptique avec une différentielle de type $(a_0 + 2k; -a_0 - 2k)$. Le lemme 2.4 permet de conclure. C.Q.F.D.

2.4. Différentielle à cœur dégénéré. Les différentielles à cœur dégénéré constitue une famille particulièrement simple d'exemples. En particulier, beaucoup de problèmes géométriques se simplifient en des problèmes combinatoires. Cela nous permettra de montrer des résultats de non existence, en particulier dans la section 5.

Rappelons que le cœur d'une différentielle abélienne ou quadratique est l'enveloppe convexe des singularités coniques pour la métrique définie par la différentielle. On dit que le cœur est *dégénéré* s'il est d'intérieur vide, c'est-à-dire s'il est réduit à l'union d'un nombre fini de liens-selles.

Le complémentaire du cœur d'une surface plate admet autant de composantes connexes que de pôles. On appelle *domaine polaire* la composante à laquelle un pôle appartient. Le bord d'un domaine polaire est toujours formé par un nombre fini de liens-selles (voir [Tah16, Lemma 2.1]).

L'intérêt de ces différentielles est donné par la proposition suivante que l'on montre aisément en utilisant le *flot contractant*.

Proposition 2.7. *Dans une strate donnée, le lieu des différentielles abéliennes ou quadratiques dont tous les résidus sont nuls est soit vide soit contient une différentielle à cœur dégénéré.*

Démonstration. Le lieu d'une strate où les résidus sont tous nuls est $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -invariant. Or, d'après le lemme 2.2 [Tah16], chaque $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbite contient une surface plate dont le cœur est dégénéré. C.Q.F.D.

On peut dans ce cas supposer que toutes les connexions de selles sont horizontales. De plus, il y a exactement $2g + n + \tilde{p} - 2$ connexions de selles dans S , où n est le nombre de zéros et \tilde{p} le nombre de pôles dans la strate. Coupant le long de ces liens selles, nous obtenons \tilde{p} partie polaire. Le *graphe domanial d'une surface à cœur dégénéré* est le graphe dont les sommets sont les domaines polaires et deux sommets sont reliés par autant d'arêtes qu'il y a de liens selles entre les deux domaines polaires. De plus, le *graphe domanial simplifié* est obtenu en enlevant tous les sommets de valence 2 au graphe domanial. Les sommets du graphe domanial qui sont de valence supérieur à trois sont dits *spéciaux*.

3. DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES MÉROMORPHES

Dans cette section, nous étudions le cas des différentielles abéliennes. Dans la section 3.1, nous traitons le cas général. Puis nous considérons dans la section 3.2 le cas où tous les résidus sont nuls dans les strates de genre zéro. Ensuite, nous traitons le cas des résidus colinéaires dans les strates de genre zéro n'ayant que des pôles simples dans la section 3.3. Enfin, nous étudions l'application résiduelle sur chaque composante connexe des strates dans la section 3.4.

3.1. Cas général. Soit $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de $2g-2$. Dans ce paragraphe, nous prouvons la surjectivité de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ dans le cas $g \geq 1$ et dans le cas $g = 0$ et $p, s \neq 0$. Le premier cas correspond aux théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas abélien. Le second cas commence la preuve du théorème 1.5. De plus, nous montrons que si $g = 0$ et $s = 0$, alors l'image de l'application résiduelle contient $\mathcal{R}(\mu) \setminus \{0, \dots, 0\}$. Nous montrons aussi que l'image de l'application résiduelle contient les résidus non colinéaires dans le cas $g = 0$ et $p = 0$.

La preuve suit le schéma suivant. Nous traitons tout d'abord le cas des strates de genre zéro avec un unique zéro. Puis nous considérons le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro et $p = 0$ ou $s = 0$. Enfin nous concluons grâce aux techniques d'éclatement du zéro (proposition 2.5) et de couture d'anse (proposition 2.6).

Avant de procéder à la preuve nous introduisons un objet géométrique associé à un uplet $r := (r_1, \dots, r_{p+s})$. Nous supposons, quitte à permuter les indices, que l'argument des résidus r_1, \dots, r_{p+s} est décroissant dans $]-\pi, \pi]$. Le *polygone résiduel* $\mathfrak{P}(r)$ est le polygone obtenu en concaténant les vecteurs r_1, \dots, r_{p+s} dans cet ordre. Remarquons que $\mathfrak{P}(r)$ est un polygone convexe, éventuellement dégénéré (i.e. d'intérieur vide).

Soient $\Omega\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une strate de genre zéro et $r := (r_1, \dots, r_{p+s})$ dans $\mathcal{R}(\mu)$ tel que le polygone résiduel $\mathfrak{P}(r)$ est non dégénéré. Pour tous les pôles P_i d'ordre b_i ayant un résidu non nul r_i , on prend une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$ (et de type arbitraire). Pour tous les pôles P_j d'ordre b_j ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_j associée à $(r_{i_j}; r_{i_j})$, où $r_{i_j} \neq 0$ est le résidu au pôle P_{i_j} . Les collages de ces parties polaires avec le polygone résiduel se font de la façon suivante.

Étant donnée une partie polaire non triviale associée à un pôle P_i . S'il existe un pôle P_j qui a une partie polaire associée à $(r_i; r_i)$, alors nous collons le segment r_i de P_i au segment r_i du domaine basique négatif de P_j . Nous continuons ces collages jusqu'à ce que il n'y ai plus de pôles sans résidu avec une partie polaire associée à $(r_i; r_i)$. Puis nous collons le dernier segment r_i au segment r_i du polygone résiduel. Nous faisons de même pour tous les pôles de résidus non nuls. Cette construction est illustrée par le dessin de la figure 4.

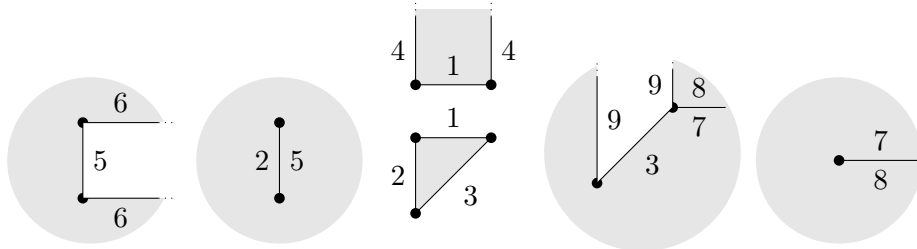


FIGURE 4. Une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(4; -2, -2, -3; -1)$ avec résidus $(0, i, -1 - i, 1)$.

La différentielle associée à cette surface plate possède clairement les invariants désirés aux pôles. Vérifions maintenant qu'elle est de genre zéro et possède un unique zéro. Remarquons que si l'on coupe cette surface le long d'une connexion de selle, on obtient deux surfaces connexes disjointes. En effet, les connexions de selles correspondent soit au

bord des parties polaires, soit aux diagonales du polygone résiduel. Une telle propriété implique qu'il existe un unique zéro, car s'il y en avait deux, un lien selle entre les deux ne déconnecterait pas la surface. De manière similaire, on en déduit que le genre de la surface est nul.

Nous traitons maintenant le cas où le polygone résiduel est dégénéré mais pas réduit à un point dans les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$, avec $p \neq 0$. Sans perte de généralité, nous supposons que les résidus sont réels. De plus, nous ordonnons les pôles de telle sorte que les résidus non nuls sont r_1, \dots, r_t et que pour $i \leq u$ les r_i sont négatifs alors que pour $u < i < t$ les r_i sont positifs. Prenons le pôle P_1 d'ordre b_1 . Nous associons à ce pôle une partie polaire d'ordre b_i associée aux vecteurs $(-r_2, \dots, -r_u; r_{u+1}, \dots, r_t)$. Nous associons à tous les pôles P_i avec $2 \leq i \leq t$ une partie polaire d'ordre b_i associée à $(\emptyset; -r_i)$. Pour les $t < i \leq m$ nous prenons une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Pour tous les pôles P_j d'ordre b_j ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_j associée à $(\pm r_{i_j}; \pm r_{i_j})$, où $r_{i_j} \neq 0$ et $i_j \neq 1$. On colle les parties polaires triviales comme expliqué au paragraphe précédent. On obtient une union de surfaces plates à bord. Il reste à coller les bords restant aux segments de la partie polaire de P_1 . On vérifie comme au paragraphe précédent que la différentielle ainsi construite vérifie les propriétés désirées.

Nous traitons maintenant le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de genre 1 avec telles que $p = 0$ ou $s = 0$.

Si $p = 0$, nous considérons la strate $\Omega\mathcal{M}_1(s; (-1^s))$, avec $s > 1$ et $r := (r_1, \dots, r_s)$ dans $\mathcal{R}(s; (-1^s))$. Prenons un tore plat S_1 tel que le lien selle le plus petit est strictement supérieur à $\sum |r_i|$. Nous enlevons de S_1 le polygone résiduel $\mathfrak{P}(-r)$. Cette opération est réalisable par notre hypothèse sur la longueur des liens selles de S_1 . Pour chacun des pôles P_i , nous prenons une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Nous collons le bord de ces parties polaires au bord de $S_1 \setminus \mathfrak{P}(r)$ par translation. La construction est représentée par le dessin de gauche de la figure 5. On vérifie sans problème que la surface ainsi obtenue est de genre 1 et possède une unique singularité conique.

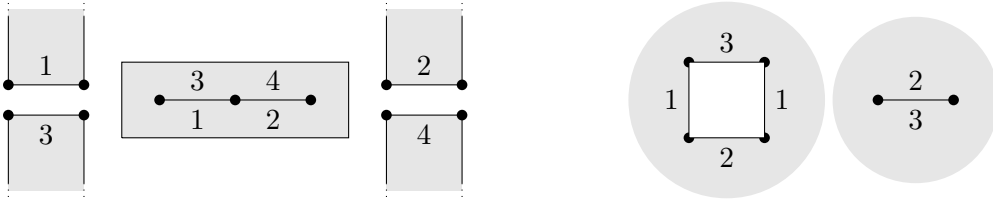


FIGURE 5. Une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_1(4; (-1^4))$ avec résidus $(1, 1, -1, -1)$ à gauche et de $\Omega\mathcal{M}_1(4; (-2^2))$ avec résidus $(0, 0)$ à droite.

Soit $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ une strate de genre 1 et $r = (0, \dots, 0)$. Pour tout P_i avec $i \geq 2$, nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour le pôle P_1 , nous prenons une partie polaire d'ordre P_1 associée à $(i, 1; 1, i)$. Nous collons les deux segments d'holonomie i par translation. Les autres segments sont collés cycliquement les uns aux autres. Plus précisément, nous collons le segment supérieur de P_i au segment inférieur de P_{i+1} (où ces indices sont pris modulo p). La construction est représentée par le dessin de droite de la figure 5.

La surface plate obtenue a clairement une unique singularité conique. Le genre est 1 car nous pouvons couper les liens selles correspondant aux segments d'holonomie 1 et i de P_1 sans déconnecter la surface. En revanche couper un autre lien selle déconnecte la surface. Donc nous avons construit une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ dont tous les résidus aux pôles sont nuls.

Nous concluons maintenant à la surjectivité de l'application résiduelle pour toutes les strates distinctes des deux familles exceptionnelles données dans le théorème 1.5. On se

donne une partition $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de -2 telle que p et s sont non nuls. Soit $r \in \mathcal{R}(\mu)$, alors par les paragraphes précédents, il existe une différentielle (X, ω) dans $\Omega\mathcal{M}_0(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ dont les résidus aux pôles sont r . L'éclatement du zéro d'ordre $\sum a_i$ (voir la proposition 2.5) donne une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ dont les résidus sont r .

Prenons maintenant une strate $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ avec $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ et $r \in \mathcal{R}(\mu)$. Si p et s sont non nuls, alors il existe une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(a-2; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ dont les résidus sont r . Par la couture d'anse (proposition 2.6), on obtient une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ ayant pour résidus r . La surjectivité de l'application résiduelle dans les cas où $p = 0$ ou $s = 0$ a été montrée dans les paragraphes précédents.

Considérons maintenant les partitions $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g-2$ avec $g \geq 2$. On se donne un uplet r dans $\mathcal{R}(\mu)$. La strate $\Omega\mathcal{M}_1(a-2g; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ contient une différentielle dont les résidus sont r . Par coutures d'anse successives, on obtient une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ dont les résidus sont r .

Enfin, considérons une partition quelconque $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g-2$ avec $g \geq 1$. L'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ est surjective. La surjectivité de l'application résiduelle $\mathfrak{R}(\mu)$ est obtenue par éclatement du zéro des différentielles de cette strate.

3.2. Genre zéro et les pôles ont un résidu nul. Nous prouvons tout d'abord que la condition (1.5) du théorème 1.5 est nécessaire. Rappelons que cette condition dit que l'ordre d'un zéro d'une différentielle de genre zéro dont tous les résidus sont nuls est inférieur à $\sum_{j=1}^p b_j - (p+1)$.

Preuve de la nécessité. Soit (\mathbb{P}^1, ω) une différentielle dont les résidus aux pôles sont nuls et S la surface plate associée. Nous pouvons supposer que la surface S possède un cœur dégénéré (cf proposition 2.7) et des liens selles horizontaux. Coupons S le long de ces liens selles et de toutes les demi-droites horizontales issues des singularités. On obtient une union disjointe de demi-plan positifs et négatifs. De plus, remarquons que chaque pôle d'ordre b_j est associé à $b_j - 1$ demi-plan positifs et $b_j - 1$ demi-plan négatifs.

Considérons une singularité conique, disons z_1 d'angle $2\pi(a_1 + 1)$. Comme les résidus aux pôles sont nuls, on obtient directement du théorème des résidus que tout chemin fermé de S possède une holonomie nulle. Cela implique que les points correspondant à z_1 peuvent apparaître au plus un fois par demi-plan. Comme l'angle à chaque sommet dans chaque demi plan est π l'angle maximal de la singularité conique z_1 est $2\pi \sum_{j=1}^p (b_j - 1)$. Cela est équivalent au fait que l'ordre a_1 de z_1 est inférieur à $\sum_{j=1}^p b_j - (p+1)$. C.Q.F.D.

Nous prouvons maintenant que la condition (1.5) du théorème 1.5 est suffisante.

Preuve de la suffisance. Considérons tout d'abord les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ ayant deux zéros avec $p-1 \leq a_1, a_2 \leq \sum b_j - (p+1)$. Pour tous les pôles nous prenons une partie polaire triviale S_i d'ordre b_i et de type τ_i associée à $(1; 1)$. Nous choisissons les τ_i tels que $\sum_i \tau_i = a_1 + 1$. Ce choix est possible car pour chaque i l'inégalité $1 \leq \tau_i \leq b_i - 1$ implique en sommant sur les pôles que $p \leq \sum_i \tau_i \leq \sum b_j - p$.

Ensuite, nous collons les bords des parties polaires de manière cyclique. Plus précisément, nous collons le segment supérieur de S_i au segment inférieur de S_{i+1} modulo p . Une telle construction est représentée sur la figure 6. La surface plate ainsi obtenue possède deux singularités coniques et est de genre nul. De plus, l'angle de la singularité conique à gauche des liens selles est d'angle $2\pi \sum \tau_i$. La différentielle ainsi construite appartient à la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ et n'a pas de résidus aux pôles.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$, avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Il y a deux cas à considérer suivant que $a_1 + a_2 > \sum b_i - p - 1$ ou non.

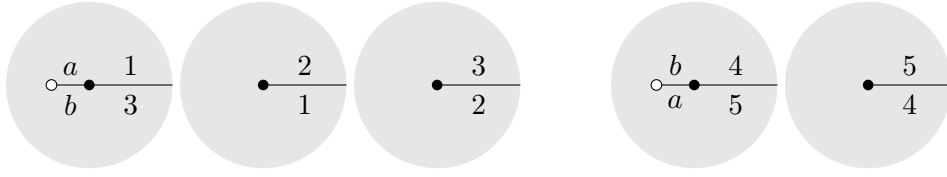


FIGURE 6. Une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(4, 1; -3, -4)$ avec résidus nuls

Si $a_1 + a_2 \leq \sum b_i - p - 1$, alors il existe une différentielle sans résidu dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1 + a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$. Donc en cassant le zéro d'ordre $a_1 + a_2$ en deux zéros d'ordres a_1 et a_2 par la proposition 2.5, nous obtenons la différentielle souhaitée.

Supposons maintenant que $a_1 + a_2 > \sum b_i - p - 1$ (ou de manière équivalente $a_3 < p - 1$). Remarquons que $a_1, a_2 \leq \frac{b-2}{3}$, avec $b := \sum b_i$. Nous obtenons que $3p > b + 1$, ce qui implique que l'un des pôles est d'ordre 2.

Nous donnons maintenant la description d'une différentielle ayant les propriétés attendues. Cette construction est illustrée dans la figure 7 dans le cas de $\Omega\mathcal{M}_0(3^3, -2^4, -3)$. Dans un premier temps, nous décrivons le procédé, puis nous ajusterons les constantes pour obtenir les singularités coniques souhaitées.

Pour le pôle d'ordre 2, prenons une partie polaire triviale d'ordre 2 associée à $(v_1, v_2; v_3)$ avec $v_3 = v_1 + v_2$. Pour chaque pôle P_i nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i de type τ_i associée à $(v_{j_i}; v_{j_i})$ pour un $j_i \in \{1, 2, 3\}$. Puis nous collons le segment v_{j_i} du triangle au segment v_{j_i} correspondant au domaine basique négatif de cette partie polaire. Cette opération ajoute une contribution angulaire de $2\pi\tau_i$ et $2\pi(b_i - \tau_i)$ aux singularités coniques correspondant aux sommets du segment v_{j_i} . Nous faisons de même pour tous les pôles jusqu'à obtenir une surface plate S_1 dont le bord est composé des trois segments v_j . Nous prenons maintenant le triangle $v_1v_2v_3$ et collons par translation ses trois arêtes au bord de S_1 . La surface plate ainsi obtenue est de genre zéro, possède trois zéros distincts et n'a pas de résidus aux pôles.

Il reste à ajuster le choix des segments v_{j_i} et des types τ_i pour chaque pôle afin d'obtenir les angles souhaités. La remarque clé est que chaque pôle P_i contribue à exactement deux singularités coniques et que la contribution à chacune d'elles est d'angle compris entre 2π et $2\pi(b_i - 1)$. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors la construction précédente permet de construire la différentielle souhaitée.

La situation peut donc être modélisée par un graphe bipartite Γ dont trois sommets A_i représentent les trois sommets du triangle $v_1v_2v_3$ et $p - 1$ autres sommets B_i représentent les pôles P_i distincts du pôle avec la partie polaire associée au triangle. Il y a une arête entre les sommets B_i et A_j pour chaque multiple de 2π de la contribution de P_i à la singularité conique A_j . Un exemple est schématisé dans la figure 7.

Il suffit de montrer qu'il est possible de distribuer les arêtes de telle façon que les sommets B_i sont connectés à précisément deux sommets A_j et que le nombre d'arêtes adjacentes à A_j est a_j . Une telle distribution peut être obtenue de la façon suivante. Rappelons que le plus grand zéro (que nous supposons être z_3) est d'ordre $a_3 \leq p - 1$. Nous partons du graphe où tous les sommets B_i sont connectés à A_1 par exactement une arête et toutes les autres arêtes connectent A_2 . Prenons un sommet B_i quelconque. Il y a $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_2 . Si la valence de A_2 moins $b_i - 1$ est supérieure à a_2 , alors nous connectons toutes ces arêtes à A_3 . Nous recommençons alors cette opération jusqu'à ce que la valence de A_2 moins $b_i - 1$ est strictement inférieur à a_2 . Dans ce cas, nous connectons à A_3 un nombre d'arête tel que la valence de A_2 est a_2 . Le sommet B_i est alors connecté aux trois sommets A_i . Donc nous enlevons l'arête entre A_1 et B_i pour la mettre entre A_3 et B_i . Comme a_1 est strictement plus petit que $p - 1$, cette opération est toujours

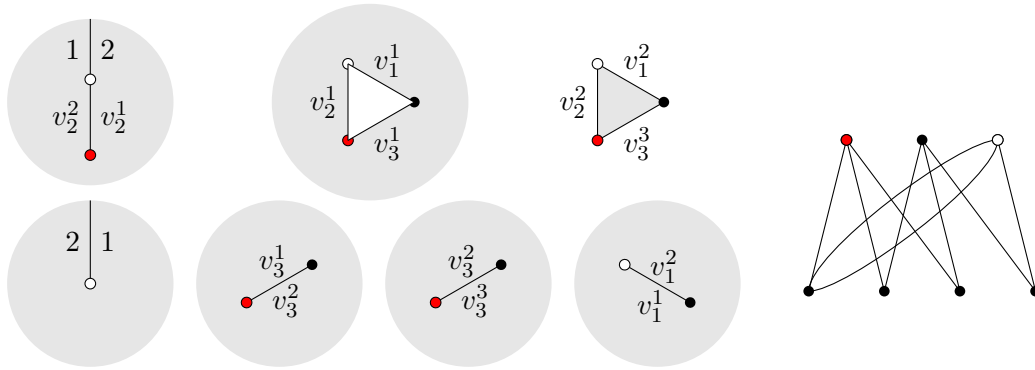


FIGURE 7. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0((3)^3; (-2)^4, -3)$ avec résidus nuls et son graphe Γ .

possible. Pour terminer, nous enlevons autant d'arêtes que nécessaire entre A_1 et les B_i pour les connecter à A_3 afin que la valence de A_1 soit a_1 .

Pour conclure le cas des différentielles de genre zéro avec des résidus nuls, nous considérons les strates ayant $n \geq 4$ zéros. Soit a_1 et a_2 les zéros de plus petits ordres, alors on a

$$a_1 + a_2 \leq \frac{2}{k} \left(\sum_i b_i - 2 \right) \leq \sum_i (b_i - 1) - 1 \leq \sum_i b_i - p - 1.$$

Donc le cas $n \geq 4$ s'obtient en éclatant un zéro d'une différentielle ayant trois zéros. C.Q.F.D.

3.3. Genre zéro avec pôles simples. Dans cette section nous nous intéressons au cas des différentielles en genre zéro n'ayant que des pôles simples. Nous prouvons les propositions 1.6 et 1.7. De plus nous montrons que les uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle sont en nombre fini pour chaque strate (à multiplication par un facteur complexe près).

Nous considérons d'abord le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Afin de se familiariser avec les éléments de cette preuve, le lecteur peut consulter l'exemple 3.2.

Preuve de la proposition 1.6. Supposons que les éléments du s -uplet $r := (r_1, \dots, r_s)$ ne soient pas colinéaires. Dans ce cas, le polygone résiduel $\mathfrak{P}(r)$ (introduit au début du paragraphe 3.1) est un polygone convexe non dégénéré. On obtient alors la différentielle souhaitée en collant des demi-cylindres infinis aux arêtes de ce polygone.

Supposons maintenant que les r_i soient colinéaires et qu'il existe un graphe Γ associé à r qui soit un graphe de connexion. On construit une différentielle de la façon suivante. Pour chaque résidu r_i on prend une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Considérons une feuille de Γ . On peut coller le segment au bord de la partie polaire correspondante au segment au bord de la partie polaire correspondant à l'autre sommet de l'arête. Puis on enlève la feuille du graphe et le poids de cette feuille à l'autre sommet. On recommence cette procédure pour une feuille du nouveau graphe. Cette opération est faite de manière inductive jusqu'à ce que le graphe soit réduit à un sommet.

Nous justifions maintenant que cette opération est toujours possible. En effet, supposons tout d'abord que le graphe n'est pas un possède strictement plus de deux sommets. Comme le poids d'une feuille est toujours strictement plus petit que le poids du sommet qui lui est relié (point (ii)), le collage est toujours possible. Enfin le fait que la différence des poids est nulle (point (i)), implique que la surface obtenue est sans bord. On vérifiera facilement que cette surface plate est de genre zéro et possède un unique zéro.

Supposons maintenant qu'il existe une différentielle ω dans $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ dont les résidus sont (r_1, \dots, r_s) . Supposons que les résidus soient colinéaires, nous les supposons réels sans perte de généralité. Nous construisons un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexion. Les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont associés aux pôles de ω dont le résidu est positif (resp. négatif). Les poids sont les valeurs absolues des résidus. Enfin deux sommets sont connectés si et seulement si le bord de leurs domaines polaires respectifs contiennent une même connexion de selle.

Le fait que ω soit de genre 0 et ne possède qu'un zéro implique clairement que ce graphe bipartite est un arbre. Le théorème des résidus implique directement que la différence des poids est nulle (point (i)). Regardons maintenant l'effet de l'opération qui enlève une feuille (dans le cas où il y a au moins deux arêtes). Cela revient à couper ω le long d'un lien selle dont l'un des côté est un unique domaine polaire. Le domaine polaire de l'autre côté est bordé d'autres liens selles. Dans le cas contraire, la surface serait singulière. Cela est vrai à toutes les étapes montrant le point (ii) de la définition des graphes de connexions. C.Q.F.D.

Avant d'étudier le cas des strates avec plus de zéros, nous montrons que les s -uplets qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}(s-2; (-1^s))$ sont en nombre fini et que ceux-ci sont commensurables entre eux.

Proposition 3.1. *Soient $r := (x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j réels strictement positifs. Si le s -uplet r n'appartient pas à l'image de $\mathfrak{R}(s-2; (-1^s))$, alors les x_i et y_j sont commensurables entre eux. De plus, si les x_i et y_j sont entiers et premiers entre eux, alors :*

$$\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \frac{s_1 s_2}{2}. \quad (3.1)$$

En particulier, il n'y a, à homothétie près, qu'un nombre fini de s -uplets qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}(s-2; (-1^s))$.

Démonstration. Nous procédons à une démonstration par récurrence. Si on a $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, toutes les configurations de résidus sont réalisables. Si $s_1 = s_2 = 2$, les seuls uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle sont proportionnels à $(1, 1, -1, -1)$.

À présent, on suppose que la proposition est démontrée pour tous les couples (s_1, s_2) tels que $s_1 \leq a$, $s_2 \leq b$ et au moins l'une des inégalités est stricte. Nous considérons un uplet qui n'est pas dans l'image avec s_1 nombres positifs et s_2 négatifs. Il y a deux possibilités. La première est que tous les x_i et y_j soient égaux. Auquel cas on a $s_1 = s_2$ et le uplet est proportionnel à $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. Les résidus sont commensurables et la somme des résidus d'une même série respecte la borne de l'équation (3.1).

La seconde possibilité est qu'il existe deux résidus, disons x_{s_1} et $-y_{s_2}$, tels que $y_{s_2} < x_{s_1}$. Le $(s-1)$ -uplet obtenu en retirant le résidu $-y_{s_2}$ et en remplaçant x_{s_1} par $x_{s_1} - y_{s_2}$ n'est pas réalisable. En effet, si ce nouveau uplet était réalisable, il existerait un graphe de connexion qui lui serait associé. Il suffirait d'ajouter à ce graphe une branche avec comme poids y_{s_2} au sommet de poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ et de remplacer le poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ par x_{s_1} . Ce graphe serait un graphe de connexion pour la configuration initiale, ce qui est absurde.

Ainsi, quitte à changer les signes, tout s -uplet non réalisable avec a résidus positifs et b négatifs s'obtient à partir d'un $s-1$ -uplet non réalisable $(x_1, \dots, x_a, -y_1, \dots, -y_{b-1})$ auquel on ajoute un résidu y_b et on remplace un résidu x_i par $x_i + y_b$. On peut supposer, quitte à changer l'ordre que $i = a$ et on note $x'_a := x_a + y_b$. On cherche donc pour quelle valeur de y_{s_2} le s -uplet $(x_1, \dots, x'_a, -y_1, \dots, -y_b)$ est non réalisable. Par hypothèse de récurrence, on normalise ces nombres de telle sorte que les x_i et les y_j avec $j \neq b$ soient des entiers premiers entre eux. Si y_b n'était pas un entier, alors ces résidus seraient dans l'image. En effet, un graphe de connexion serait obtenu de la façon suivante. On permute y_1

et y_b . On prend s_1 sommets en haut et s_2 sommets en bas. Le sommet i_0 en haut est relié au sommet j_0 en bas si et seulement si pour $J = j_0$ ou $J = j_0 + 1$, on a

$$\sum_{i \leq i_0 - 1} x_i \leq \sum_{j \leq J} y_j \leq \sum_{i \leq i_0} x_i.$$

Les poids des sommets sont évidemment donnés par les y_j , les x_i pour $i < a$ et x'_a pour $i = s_1$. Par conséquent, pour obtenir une configuration non réalisable, il est nécessaire que y_b soit un entier. Nous avons donc démontré par récurrence que les éléments des s -uplets non réalisables sont commensurables entre eux.

On montre maintenant la borne donnée par l'équation (3.1). On travaille à nouveau avec le s -uplet défini par $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$. Si les résidus sont tous égaux, la borne est claire. Sinon, il y a un élément x_i strictement plus petit que y_j . On supposera que $i = s_1$ et $j = s_2$ et que $y_{s_2} \leq y_j$ pour tout $j \leq s_2$. En enlevant le résidu $-y_{s_2}$ et en l'ajoutant à x_{s_1} , on obtient une nouvelle configuration non réalisable. Par l'hypothèse de récurrence, elle vérifie la borne donnée par l'équation (3.1) avec $s_2 - 1$ termes. Comme y_{s_2} est inférieur aux autres y_j , on a

$$\sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \frac{s_2}{m_2 - 1} \cdot \sum_{j=1}^{s_2-1} y_j \leq \frac{s_2}{s_2 - 1} \cdot \frac{s_1 \cdot (s_2 - 1)}{2} \leq \frac{s_1 \cdot s_2}{2}.$$

Ceci démontre par récurrence la borne de l'équation (3.1).

Enfin, tous les résidus non réalisables sont proportionnels à un s -uplet formé de nombres entiers inférieurs à la borne de l'équation (3.1). Comme celle-ci ne dépend que du nombre de pôles, les droites complexes n'appartenant pas à l'image de l'application résiduelle d'une strate donnée sont en nombre fini. C.Q.F.D.

Nous illustrons maintenant les concepts introduits dans un exemple.

Exemple 3.2. Dans cet exemple, nous illustrons tout d'abord la correspondance entre une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1)^7)$ et le graphe de connexion associé. La figure 8 montre que l'image de l'application résiduelle de cette strate contient les résidus $(3, (1^3), (-2^3))$.

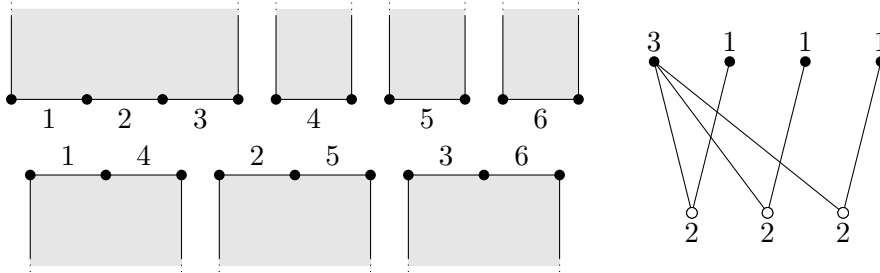


FIGURE 8. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1)^7)$ avec résidus $(3, (1^3), (-2^3))$ et son graphe de connexions.

Nous montrons maintenant que ces concepts donnent des conséquences intéressantes. Nous montrons que l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s - 2; (-1)^s)$ n'est pas surjective dès que $s \geq 4$. En effet, soit $r := (r_1, \dots, r_s)$ des nombres réels non nuls dans $\mathcal{R}(s - 2; (-1)^s)$. Notons la somme des nombres positifs r_+ . S'il existe plus de $r_+/2$ nombres positifs égaux à 1 et plus de $r_+/2$ nombres négatifs égaux à -1 , alors r n'est pas dans l'image de l'application résiduelle de cette strate. En effet, tous les graphes associés à r connectent un sommet de poids 1 à un sommet de poids 1. Donc le point (ii) de la définition des graphes de connexions n'est jamais satisfait.

Nous passons maintenant au cas des strates ayant plus de deux zéros.

Preuve de la proposition 1.7. Soient $\mu := (a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une partition de -2 avec $n \geq 2$ et $r := (r_1, \dots, r_s) \in \mathcal{R}(\mu)$. Supposons que r soit dans l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$. Montrons l'existence d'une différentielle stable vérifiant les conditions de la proposition 1.7. Soit ω une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant pour résidus r . Quitte à perturber ω sans changer les résidus, on peut supposer qu'il n'existe pas de liens de selles horizontaux entre deux singularités coniques distinctes. En effet, le lieu de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ où les résidus sont r est une variété orbifold de dimension 2 possédant des coordonnées période (voir [BCGGM16b]). Comme tous les résidus sont réels, toute demi-droite horizontale issue d'une singularité conique heurte cette même singularité en temps fini. Coupons la surface plate associée à ω le long de ces connexions de selles. On obtient une union disjointe de cylindres et de demi-cylindres infinis.

La hauteur des cylindres fini peut être choisie arbitrairement sans changer la strate et les résidus. En faisant tendre toutes les hauteurs de ces cylindres vers l'infini, on obtient une différentielle stable. De plus, comme chaque zéro est relié à un autre par un cylindre, il y a précisément un zéro sur chaque composante irréductible de cette différentielle.

L'autre implication est claire : une différentielle dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant les résidus r est donnée par le lissage de la différentielle stable comme expliqué au lemme 2.3. C.Q.F.D.

On donne une conséquence intéressante de ce résultat.

Corollaire 3.3. *Les résidus $((1^{s+1}), (-1^{s+1}))$ n'appartiennent pas à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^{2s+2}))$ où $s \geq 1$ et $a_1 > \frac{1}{2}(3s - 1)$.*

Démonstration. Supposons l'existence d'une telle différentielle. Cela implique l'existence d'une différentielle entrelacée (X, ω) de type $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ n'ayant qu'un seul niveau et une unique singularité sur chacune des composantes de X . Considérons la composante qui contient a_1 . On peut vérifier sans problème que le nombre de résidus égaux à 1 et à -1 est supérieur à la moitié de la somme des résidus positifs. On obtient une contradiction car ces résidus ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle comme expliqué dans l'exemple 3.2. C.Q.F.D.

L'existence de telles différentielles entrelacées peut se reformuler dans le langage des graphes. Nous donnons maintenant une telle description puis illustrons ces constructions dans quelques exemples.

Définition 3.4. Soient $\mu := (a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une partition de -2 et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ dans $\mathcal{R}(\mu)$. Un *graphe déliant* G de type μ et de poids λ est un arbre marqué aux sommets et où on pondère les demi-arêtes donné de la façon suivante.

- 1) G a n sommets T_1, \dots, T_n de valences respectives v_1, \dots, v_n .
- 2) Il y a s marquages aux sommets de poids respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.
- 3) Les demi-arêtes $A_{i,1}, A_{i,2}$ formant une arête ont pour poids Λ_i et $-\Lambda_i$ avec $\Lambda_i \neq 0$.

De plus, les relations suivantes sont vérifiées.

- i) La somme du nombre de marquages et de la valence est $a_i + 2$.
- ii) La somme des poids des marquages et du poids des demi-arêtes contenant T_i est nul.
- iii) Le uplet formé des poids des marquages et du poids des demi-arêtes appartient à l'image de $\mathfrak{R}(a_i; (-1^{a_i+2}))$.

Lemme 3.5. *Soient $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et n zéros, alors les résidus (r_1, \dots, r_s) sont dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si il existe un graphe déliant de type $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ et de poids (r_1, \dots, r_s) .*

Démonstration. On part d'une différentielle entrelacée (X, ω) donnée par la proposition 1.7. Le graphe G est donné par le graphe dual de X . Les marquages correspondent aux pôles et les poids sont les résidus associés. Ce graphe vérifie les trois conditions d'un graphe

déliant. Par exemple, l'angle de la singularité conique d'une composante irréductible de X est égale à 2π multiplié par le nombre de cylindres attachés à cette singularité plus deux. Cela donne la condition (i) de la définition 3.4.

Réciproquement, étant donné un graphe déliant, on peut former une différentielle entrelacée en associant à chaque sommet une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu_i)$ où le résidu aux pôles est donné par le poids au marquage ou à la demi-arête. Le fait que cette différentielle entrelacée est lissable est une conséquence directe du lemme 2.3. C.Q.F.D.

Exemple 3.6. Dans cet exemple, nous donnons des graphes déliant de types $(1, 3)$ et $(2, 2)$ pour les résidus $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$. Tout d'abord on peut remarquer que ces résidus ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}(4; (-1^6))$. Ces graphes et les surfaces plates correspondantes sont représentés dans la figure 9.

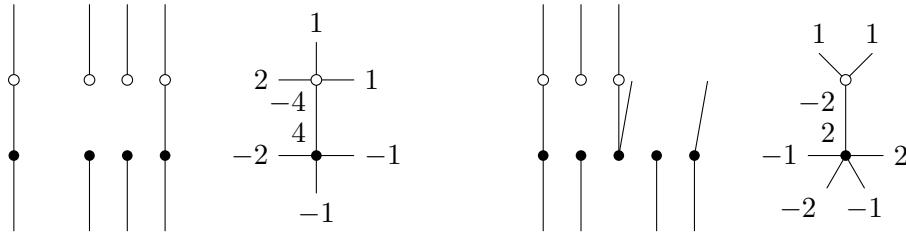


FIGURE 9. Différentielles dans $\Omega\mathcal{M}_0(2, 2, (-1^6))$ et $\Omega\mathcal{M}_0(1, 3, (-1^6))$ avec résidus $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$ et leurs graphes déliant.

3.4. Composantes connexes. Les strates sont en général non connexes et leur composantes connexes ont été classifiées par Boissy dans [Boi15, Theorem 1.1, 1.2]. Il est naturel de se demander si l'application résiduelle est surjective pour chaque composante connexe. Comme les strates sont connexes en genre zéro, la question se pose pour $g \geq 1$. Dans cette section nous prouvons que l'application résiduelle est surjective restreinte à chaque composante connexe.

La clé de la preuve est le fait que chaque composante connexe de la strate minimale peut s'obtenir à partir des strates minimales de genre zéro en cousant des anses (voir [Boi15, Proposition 6.1]). Cela nous permettra de restreindre notre étude au cas où tous les résidus sont nuls en genre 1. C'est pourquoi nous nous contentons de rappeler la classification de Boissy dans ce cas.

En genre un, les composantes connexes des strates sont caractérisées par le nombre de rotation $\text{rot}(S)$ des surfaces plates. Pour une surface plate S définie par une différentielle méromorphe de $\Omega\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec une base symplectique de lacets lisses de l'homologie (α, β) le *nombre de rotation* est

$$\text{rot}(S) := \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p, \text{Ind}(\gamma), \text{Ind}(\delta)).$$

On a le résultat suivant dû à Boissy.

- (i) Si $n = p = 1$, la strate est $\Omega\mathcal{M}_1(a; -a)$ avec $a \geq 2$ et chaque composante connexe correspond à un nombre de rotation qui est un diviseur strict de a .
- (ii) Sinon, il existe une composante connexe correspondant à chaque nombre de rotation qui est un diviseur de $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$.

Nous montrons maintenant la surjectivité de l'application résiduelle restreinte à chaque composante connexe de genre supérieur à un.

Preuve de la proposition 1.3. Il suffit de traiter le cas des strates minimales (avec un seul zéro). En effet, l'éclatement des zéros ne modifie pas les résidus aux pôles. De plus, cette opération permet d'atteindre toutes les composantes connexes à partir des strates minimales (voir [Boi15, Proposition 7.1]). À partir de maintenant, nous considérons les strates

minimales. Maintenant, la Proposition 6.1 de [Boi15] montre que chaque composante connexe d'une strate de genre $g \geq 1$ peut être obtenue par l'ajout d'une anse à une surface de genre $g - 1$. Comme la couture d'anse est une opération locale, si l'application résiduelle est surjective en genre g , elle l'est aussi pour tous les genres supérieurs à g . Ainsi il suffit de prouver la proposition pour les strates minimales de genre 1.

En genre un, les strates ayant des pôles simples sont connexes. Nous supposons donc que les strates ne paramètrent que des différentielles avec des pôles d'ordres supérieurs à deux. La proposition est trivialement vraie lorsqu'il y a un unique pôle, donc on considérera $p \geq 2$ dans tout ce qui suit. Dans ce cas, le théorème 1.5 implique que la couture d'anse à partir des strates de genre zéro permet d'obtenir une différentielle dont les résidus sont $(r_1, \dots, r_p) \in \mathcal{R}(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Dans la suite, nous construisons dans chaque composante connexe une différentielle dont tous les résidus sont nuls.

Nous considérons la construction suivante. Pour tous les pôles, nous prenons une partie polaire de type b_i associée aux vecteurs $(1; 1)$. On colle le bord supérieur de P_i au bord inférieur de P_{i+1} . Il reste deux liens-selles homologues que l'on relie par un cylindre. La surface obtenue possède les invariants locaux souhaités.

Une base de l'homologie est donnée par une géodésique périodique α du cylindre (donc d'indice zéro) et le lacet β suivant. Il coupe α dans le cylindre puis le lien selle au bord du domaine polaire P_p , puis tourne à gauche avant de ressortir de ce domaine polaire en coupant l'autre lien selle et ainsi de suite. Remarquons que changer le type τ d'une partie polaire change d'autant l'indice de β . On peut donc obtenir pour β tous les indices dans $\{p, -p + \sum_{i=1}^p b_i\}$. À moins que la totalité des pôles ne soient d'ordre deux, on obtient ainsi toutes les composantes connexes de la strate.

Dans une strate minimale avec uniquement des pôles d'ordre deux, il y a exactement deux composantes connexes. La construction qui précède ne permet d'obtenir que la composante dont le nombre de rotation a la même parité que p . On propose alors une deuxième construction. On prend $p - 1$ parties polaires et on les colle comme précédemment. La dernière partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On identifie les vecteurs i entre eux et les deux autres bords comme précédemment. Le lacet β est défini comme précédemment et a pour indice p . Le lacet α connecte le milieu de des segments v sans sortir du domaine polaire de P_p . Son indice est donc 1. On construit une différentielle avec n'importe quels résidus dans la composante connexe dont le nombre de rotation est 1.

Il reste le cas des composantes connexes de $\Omega\mathcal{M}_1(2p; (-2^p))$ avec p impair pour lesquelles le nombre de rotation est 2. On reprend la construction précédente pour les $p - 2$ premiers pôles. On associe au pôle P_{p-1} partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On associe à P_p la partie polaire associée à $(i; i)$. On identifie les bords comme précédemment. Ainsi, les lacets analogues à ceux de la construction précédente auront pour indices respectifs $p - 1$ et 2. Le nombre de rotation de la surface est donc 2. C.Q.F.D.

4. PLURIDIFFÉRENTIELLES EN GENRE ZÉRO

Dans cette section, nous considérons les k -différentielles de genre zéro pour $k \geq 2$. Cette section est organisée de la façon suivante. Le cas des strates de k -différentielles ayant un pôle d'ordre non divisible par k est traité dans la section 4.1. La section 4.2 traite des strates ayant uniquement des pôles d'ordres divisibles par k mais qui ne sont pas tous égaux à $-k$. Enfin, la section 4.3 traite des strates qui n'ont que des pôles d'ordre $-k$.

4.1. Différentielles ayant un pôle d'ordre supérieur non divisible par k . Rappelons que la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . En genre zéro, beaucoup de ces strates sont vides comme le montre le résultat suivant.

Lemme 4.1. Soient $\mu = (m_1, \dots, m_t)$ un n -uplet tel que $\sum m_i = -2k$ et $d = \text{pgcd}(\mu, k)$. Toutes les k -différentielles de type μ sont la puissance dième d'une k/d -différentielle primitive de $\Omega^{k/d}\mathcal{M}_0(\mu/d)$.

Démonstration. Une k -différentielle ξ sur \mathbb{P}^1 de type μ est donnée par la formule

$$\xi = (z - z_i)^{m_i}(dz)^k = \left((z - z_i)^{m_i/d}(dz)^{k/d} \right)^d.$$

C.Q.F.D.

A partir de maintenant nous ne considérons que des strates non vides. Dans le cas où il existe des pôles d'ordres non divisibles par k , nous commençons par caractériser l'image de l'application k -résiduelle pour les strates ayant un unique zéro.

Lemme 4.2. Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(a; b_1, \dots, b_p; c_1, \dots, c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est

- i) $\mathcal{R}^k(\mu)$ si $r \geq 2$ ou $s \geq 1$,
- ii) $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si $r = 1$ et $s = 0$.

Démonstration. On se donne la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a; b_1, \dots, b_p; c_1, \dots, c_r; (-k^s))$ et (R_1, \dots, R_{p+s}) dans $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Nous donnons maintenant une construction d'une k -différentielle avec ces invariants locaux.

Pour les pôles P_{p+i} d'ordres $-k$, nous prenons une partie polaire non triviale d'ordre k associée à une racine k ième r_{p+i} de R_{p+i} . Pour chaque pôle P_i d'ordre $b_i = k\ell_i$ tel que $R_i \neq 0$, nous prenons une partie polaire non triviale d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Pour cette construction nous choisissons une racine r_i avec une partie réelle positive. Pour les pôles d'ordre b_i tels que $r_i = 0$ nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ où r_{j_i} est l'une des racines choisie précédemment.

Maintenant, pour tous les pôles d'ordre c_i sauf un, disons P_1 d'ordre c_1 , nous prenons une partie polaire de type c_i associée à $(1; \emptyset)$. Pour le dernier pôle P_1 d'ordre c_1 , nous prenons la partie polaire de type c_1 associée à $(\emptyset; (1^{r-1}, r_1, \dots, r_l))$ où l est le nombre de résidus non nuls et ont suppose ces nombres rangés par argument croissant.

La surface est obtenue par les recollements suivant. Nous collons le segment inférieur r_{j_i} de chaque partie polaire triviale au bord de la partie non triviale du pôle P_{j_i} . Nous faisons les collages similaires, pour chacun des pôles d'ordre divisible par k dont le résidu est nul. Ensuite nous collons par translation les bords des parties polaires différentes de P_1 aux segments correspondants du bord de la partie polaire de P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 10. La k -différentielle ξ associée à cette surface plate possède les ordres de pôles et les k -résidus souhaités.

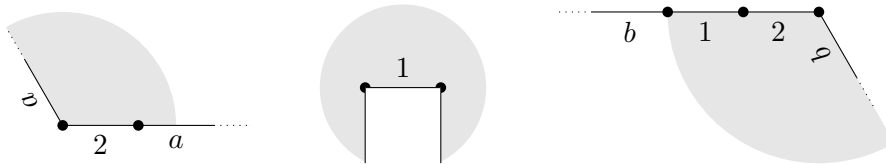


FIGURE 10. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu non nul au pôle d'ordre 6.

Il reste donc à montrer que ξ possède un unique zéro et que le genre de la surface est nul. Pour cela, il suffit de vérifier que si l'on coupe la surface le long d'un lien selle, alors on sépare cette surface en deux parties. C'est une conséquence du fait que les liens selles correspondent aux bords des domaines polaires.

Pour terminer la preuve du lemme 4.2, il reste à montrer que l'origine appartient à l'image de l'application k -résiduelle si et seulement s'il existe au moins deux pôles d'ordres non divisibles par k (dont aucun n'est d'ordre k).

Montrons que l'origine appartient à l'image de l'application résiduelle s'il existe au moins deux pôles P_1 et P_2 d'ordre respectif c_1 et c_2 non divisible par k . Pour tous les autres pôles nous associons la même partie polaire que précédemment. Plus précisément, pour chaque pôle d'ordre b_i divisible par k nous prenons une partie polaire d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordres non divisibles par k distincts de P_1 , nous prenons la partie polaire associée à $(1; \emptyset)$. Pour P_1 nous prenons la partie polaire d'ordre c_1 associée à $(\emptyset; (1^r))$.

Les collages sont les suivants. Nous collons le bord inférieur de la partie polaire du i -ième pôle d'ordre divisible par k au bord d'en haut du $(i + 1)$ -ième pôle d'ordre divisible par k . Le bord inférieur de la partie polaire associée au pôle P_p est collé au bord du segment du pôle P_2 . Enfin, tous les segments restant sont collés au bord de la partie polaire associée à P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 11. On vérifie facilement que cette surface possède les propriétés souhaitées.

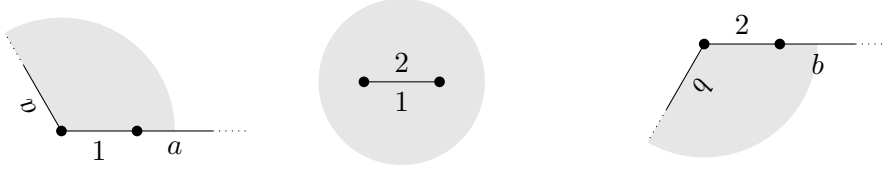


FIGURE 11. Une 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu nul.

Nous montrons enfin que s'il existe un unique pôle d'ordre c non divisible par k , alors l'origine n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle. Nous procédons par l'absurde.

Supposons que la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a; b_1, \dots, b_p; c)$ contienne une k -différentielle ξ_0 avec des k -résidus nuls à tous les pôles. Pour tous les $i \in \{1, \dots, p\}$, nous collons une k -différentielle à P_i de la façon suivante. Si b_i/k est pair, nous collons une différentielle de genre $g_i = b_i/2k$ avec un unique zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i . Si b_i/k est impaire, nous collons une différentielle de genre $g_i = (b_i + 1)/2k$ avec un zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i et un autre zéro d'ordre k . De plus, nous choisissons ces k -différentielles comme étant la puissance k ième d'une différentielle abélienne.

La k -différentielle entrelacée ainsi obtenue est de type $(a, (k^d); c)$, où d est le nombre de b_i tels que b_i/k est impaire. Par le théorème principal de [BCGGM16b] (qui dans ce cas est un généralisation de la propriété 2.4 à plus de composantes), cette k -différentielle entrelacée est lissable dans la strate $\mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a, (k^d); c)$, avec $g = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{b_i+1}{2} \rfloor$.

Remarquons que

$$\dim \mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a, (k^d); c) = 2g + d - 1.$$

D'un autre côté, la dimension des k -différentielles entrelacées au bord que nous venons de construire (avec ξ_0 sur X_0 projectivisé) est donné par

$$-1 + \sum_{i>0, b_i/k \text{ pair}} 2g_i + \sum_{i>0, b_i/k \text{ impaire}} (2g_i + 1) = 2g + d - 1,$$

où le -1 provient de la projectivisation simultanée des différentielles sur les courbes distincte de X_0 . Ce lieu a la même dimension que la strate, ce qui contredit le fait que le bord d'une variété est de dimension strictement inférieur à l'intérieur. C.Q.F.D.

Lemme 4.3. *L'application résiduelle de $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p; c_1, \dots, c_r; (-k^s))$ avec $n \geq 2$ et $r \geq 1$ est surjective.*

Démonstration. Si $r \geq 2$ ou $r = 1$ et $s \geq 1$, on peut simplement éclater le zéro des différentielles données par le lemme 4.2. On suppose maintenant $r = 1$ et $s = 0$. Par éclatement de zéros, il suffit de montrer que l'origine appartient à l'image de l'application résiduelle avec $n = 2$. Dans ce cas, la construction est la suivante. Nous écrivons $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \leq 0$. On considère deux cas selon que $l_1 = l_2$ ou $l_1 < l_2$.

Dans le cas où $l_1 = l_2$, on associe aux pôles d'ordres $-b_i$ les parties polaires d'ordre b_i et de type τ_i associées à $(1; 1)$. De plus, on choisit les τ_i de telle sorte que $\sum_i \tau_i = l_1$. Pour le pôle d'ordre c on prend la partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1, \exp((\bar{a}_1 + k)\frac{2\pi}{k}))$. On obtient la différentielle souhaitée en identifiant le bord inférieur de la partie polaire associée à P_i au bord supérieur de celle de P_{i+1} . Le bord supérieur de P_1 est identifié au segment 1 de la partie polaire d'ordre c . Le bord inférieur de la partie polaire de P_p est identifié par rotation au segment $\exp((\bar{a}_1 + k)\frac{2\pi}{k})$.

Dans le cas où $l_1 < l_2$, on associe au pôle d'ordre c une partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1)$. Pour l'une des parties polaires d'ordre divisible par k , disons P_1 , l'on associe la partie polaire suivante. Elle est d'ordre b_1 et de type τ associée à $(1; v_1, v_2)$, avec v_i d'égale longueur, $v_1 + v_2 = 1$ et l'angle entre ces deux étant $(\bar{a}_1 + k)\frac{2\pi}{k}$ et τ maximal tel que $\tau \leq \min(b_1 - 1, l_1)$. Pour les autres pôles d'ordre divisibles par k , on associe des parties triviales associées à $(v_1; v_1)$ jusqu'à pouvoir en collant ces parties polaires de manière cyclique obtenir la singularité d'ordre a_1 . Pour les autres pôles, on prend alors des parties polaires associées à $(1; -1)$. On les colle ensuite de manière cyclique afin d'obtenir la surface plate souhaitée. C.Q.F.D.

4.2. k -différentielles dont les pôles sont d'ordres divisibles par k . Cette section est dédiée strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-k^s))$ avec $p \neq 0$. Nous traitons d'abord le cas des strates avec $s = 0$ puis celui où $s \neq 0$. Insistons sur le fait que dans toute cette section, nous ne considérons que les strates non vides. Par le lemme 4.1, cela revient à supposer que $\text{pgcd}(a_i, k) = 1$. Enfin nous dénotons tout au long de cette section $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

Les strates avec $s = 0$. Dans ce paragraphe, nous traitons les strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$. Nous commençons par le cas le plus simple et le plus intéressant de strates n'ayant qu'un pôle.

Lemme 4.4. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ une strate non vide de genre 0. L'image de l'application résiduelle de cette strate est \mathbf{C} si $n \geq 3$ et \mathbf{C}^* si $n = 2$.*

Démonstration. Considérons tout d'abord les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ où $\mu = (a_1, a_2; -k\ell)$ à deux zéros d'ordres premiers avec k . Il suffit de montrer que l'image de l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}^k(\mu)$ ne contient pas 0.

Soit (X, ξ) une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell)$. Il existe un lien selle γ entre les deux zéros de ξ . Sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{\gamma\}$, la différentielle $\xi^{1/k}$ est une différentielle abélienne. Le bord de cette surface plate est faite de deux segments γ_i qui sont identifiés ensemble pour former le lien selle γ de ξ . Comme ξ est primitive, le collage fait intervenir une rotation d'angle $\frac{2l\pi}{k}$, avec $\text{gcd}(l, k) = 1$. Le k -résidu au pôle est la puissance k ième de la somme de l'holonomie de chemins γ_1 et γ_2 , qui est donc non nulle.

Nous considérons maintenant les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ avec $n \geq 3$ zéros. Nous commençons par le point crucial qui est de montrer que 0 est dans l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}^k(a_1, a_2, a_3; -k\ell)$. Comme $\text{pgcd}(a_i, k) = 1$, nous pouvons supposer que a_1 et a_2 ne sont pas divisibles par k .

Nous commençons par construire une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, a'_3; -2k)$, où a'_3 est donné par la condition $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + a'_3 = 0$. Notons qu'il existe un l'_3 tel que $a_3 = l'_3 k + a'_3$. On se donne la partie polaire triviale d'ordre $k\ell$ associée à $(v_1, v_2; w_1, w_2)$ où les v_i, w_j sont définis comme suit. On a $v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = 1$ et l'angle formé au point de concaténation de v_1 et v_2 (resp. w_1 et w_2) est $(k + \bar{a}_1)\frac{2\pi}{k}$ (resp. $(k + \bar{a}_2)\frac{2\pi}{k}$). Dans la phrase

précédente, il va sans dire que l'angle est calculer dans les parties polaires $D^+(v_1, v_2)$ et $D^-(w_1, w_2)$. Nous obtenons une surface plate S_0 en collant (par rotation) v_1 avec v_2 et w_1 avec w_2 . Cette construction (ainsi que la suivante) est illustrée par la figure 12. On peut vérifier que les choix fait dans la construction impliquent que la différentielle associée possède les invariants locaux souhaités.

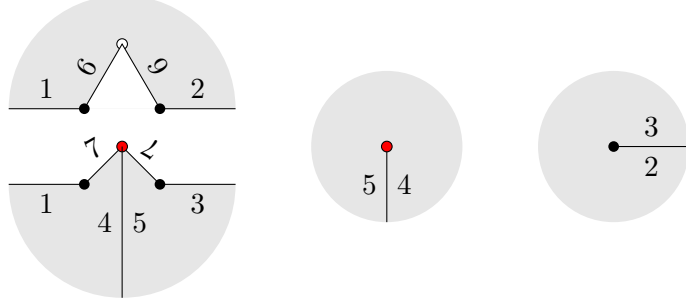


FIGURE 12. Pluridifférentielle de $\Omega^6 \mathcal{M}_0(-1, 2, 5; -18)$ dont le 6-résidu est nul.

Enfin, nous construisons une différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -k\ell)$ dont le k -résidu est nul. Nous partons de l'union disjointe de la surface plate S_0 de $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}'_3, -2k)$ construite au paragraphe précédent et de $l_1 + l_2 + l'_3$ plans. Dans chacun de ces plans, nous faisons une demi-fente respectivement vers le haut pour l_1 plans, vers le bas pour l_2 plans et vers la droite pour les l'_3 plans restants. À chaque singularité conique de S_0 nous faisons une demi-fente dans la direction correspondante. La surface plate S est obtenue en collant cycliquement les bords des fentes par translation. Il n'est pas difficile de vérifier que cette surface plate possède les propriétés souhaitées.

Enfin, pour $n > 3$ zéros, nous procédons par récurrence sur n en utilisant éclatement des zéros (Propriété 2.5). Nous venons de montrer que l'application résiduelle est \mathbf{C}^* pour $n = 2$ et contient 0 pour $n = 3$. Il suffit donc de montrer qu'il existe a_i et a_j tels que $a_i + a_j > -k$ et $d := \text{pgcd}(\mu \setminus \{a_i, a_j\} \cup \{a_i + a_j\}, k) \neq k$. En effet, dans ce cas, on peut éclaté le zéro d'ordre $a_i + a_j$ des k -différentielles qui sont la puissance dième d'une (k/d) -différentielle de $\Omega^{k/d} \mathcal{M}_0(\mu \setminus \{a_i, a_j\} \cup \{a_i + a_j\}; -k\ell)$. Et alors la multiplicativité du k -résidu (cf. équation (2.1)) permet de conclure.

Montrons que l'on peut toujours trouver deux ordres a_i et a_j comme ci-dessus. Supposons tout d'abord qu'il existe a_i, a_j tels que $a_i + a_j < -k$. En particulier, $-k < a_i, a_j < 0$ et donc l'addition de a_i à n'importe lequel des ordres positifs vérifie les conditions ci-dessus. Maintenant nous supposons que la somme de toutes les paires d'ordres a_i, a_j sont strictement supérieurs à $-k$. Dans le cas où $d = k$ pour un choix a_i, a_j , alors pour tout $l \neq i, j$ les a_l sont divisibles par k . Donc a_i et a_j sont premiers avec k . En particulier, on peut choisir a_i et a_l pour $l \neq j$ pour obtenir la condition ci-dessus. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas de $p \geq 2$ pôles. Dans ce cas il existe une famille de strates exceptionnelles.

Lemme 4.5. *L'image de l'application k -résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4p' - 3, 4p' - 1; (-4^{2p'}))$ ne contient pas $(1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une telle différentielle quadratique ξ existe. On peut alors considérer une géodésique γ entre les deux zéros tel que le complémentaire est orientable. Un unique pôle borde γ car sinon la différentielle ξ serait orientable. Le bord de ce domaine polaire est donc constitué de liens selles d'holonomie réelle et de deux segments égaux γ_1 et γ_2 . Comme chaque pôle contribue à 3π d'une singularité conique, il faut que p' domaines polaires soient bordés par le zéro d'ordre $4p' - 3$ et $p' - 1$ domaines polaires par celui d'ordre $4p' - 1$. Comme chaque résidu quadratique est égale à 1, le bord

du domaine polaire spécial est formé de γ_1 puis des segments de somme p' , puis de γ_2 et enfin de segments de somme $-(p' - 1)$. Le résidu quadratique à ce pôle est donc donné par $(1 + \gamma_1 + \gamma_2)^2 \neq 1$. C.Q.F.D.

Maintenant, le résultat suivant montre que, sauf dans les strates exceptionnelles précédentes, l'image de l'application résiduelle contient $\mathcal{R}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Lemme 4.6. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ contient $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sauf pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4p' - 3, 4p' - 1; (-4^{2p'}))$ où elle contient $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \mathbf{C} \cdot (1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Nous commencerons par le cas des strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$. Dans les cas des strates décrites dans le lemme 4.5 nous montrons que l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}^k(\mu)$ contient $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \mathbf{C} \cdot (1, \dots, 1)$. Dans les autres cas, nous montrons que l'image de $\mathfrak{R}^k(\mu)$ contient $\mathcal{R}^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Nous supposons que les pôles dont le k -résidu est nul sont les pôles P_1, \dots, P_t .

Supposons tout d'abord que $-k < a_1 < 0$. Soit $R = (R_1, \dots, R_p) \neq (0, \dots, 0)$, on construit une différentielle avec ces invariants de la manière suivante. Nous prenons une racine k ième r_i de R_i de partie réelle positive. Maintenant considérons le pôle P_1 d'ordre $-k\ell_1$ et de k -résidu R_1 . On associe alors à ce pôle la partie polaire d'ordre $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ si $R_1 = 0$ et associée à $(v_1, v_2; r_2, \dots, r_p)$ si $R_1 \neq 0$. Les v_i sont deux segments de même longueur et l'angle à leur intersection (cet angle est calculé dans D^+) est $\frac{2(k+a_1)\pi}{k}$. De plus, la somme $v_1 + v_2$ est égale à $\sum_i r_i$. Pour les autres pôles P_i , on prend une partie polaire associée à $(r_i; \emptyset)$ si $R_i \neq 0$ et $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$ si $R_i = 0$. Il reste par identifier tous les segments par translation à exception des v_i que nous identifions par rotation. On vérifie de manière analogue à précédemment que cette surface plate possède les invariants locaux souhaités.

Nous supposons maintenant que a_1 et a_2 sont supérieurs à 0. De plus, nous supposons que $l_1 \leq l_2$ dans l'écriture $a_i = kl_i + \bar{a}_i$. La construction dépend de l'existence, ou non, d'un entier $m \leq t$ tel que

$$\sum_{i=1}^{m-1} (\ell_i - 1) < l_1 \leq \sum_{i=1}^m (\ell_i - 1). \quad (4.1)$$

Supposons qu'il existe un m satisfaisant l'équation (4.1). On associe au pôle P_m la partie polaire d'ordre $k\ell$ et de type $b_i - \left(l_1 - \sum_{i=1}^{m-1} (\ell_i - 1)\right)$ associée à $(v_1; r_{t+1}, \dots, r_p, v_2)$ où les v_i sont d'égale longueur, $v_1 - v_2 = \sum r_i$ et l'angle à leur intersection est $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. Puis, on associe aux $m - 1$ premiers pôle la partie polaire d'ordre b_i et de type 1 associée à $(v_1; v_1)$. On colle les bords de ces parties polaires entre elles par translation de manière cyclique. Les segments v_1 et v_2 de la partie polaire spéciale sont collés aux bords restant par rotation et translation. Pour les autres pôles d'indice $m < i \leq t$, on prend la partie polaire associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$. Les collages sont donnés comme précédemment. Cette construction est illustrée par la figure 13. On vérifie facilement que cela donne une k -différentielle avec les invariants locaux recherchés.

Supposons qu'il n'existe pas d'entier m satisfaisant à l'équation (4.1). Dans ce cas on prend le pôle, disons P_p d'ordre maximal parmi les pôles ayant un k -résidu non nul. On partitionne les autres pôles avec un k -résidu non nul en deux parties A_i . Ces deux parties sont telles que les deux sommes $S_i := \sum_{P_j \in A_i} \ell_j$ soient respectivement inférieurs l_1 . On notera $A_1 = \{P_{t+1}, \dots, P_{p_0}\}$ et $A_2 = \{P_{p_0+1}, \dots, P_{p-1}\}$. De plus, on suppose qu'il existe des racines r_i de parties réelles (ou imaginaires) strictement positives telles que $\sum_{t+1}^{p_0} r_i \neq \sum_{p_0+1}^p r_i$. On prend alors la partie polaire d'ordre b_p de type τ associée à $(v_1, -r_{t+1}, \dots, -r_{p_0}; r_{p_0+1}, \dots, r_{p-1}, v_2)$ satisfaisant les conditions suivantes. Le type σ vérifie les inégalités $S_1 + \tau \leq l_1$ et $S_2 + (\ell_p - 1 - \tau) \leq l_1$. De plus, les v_i sont choisis avec

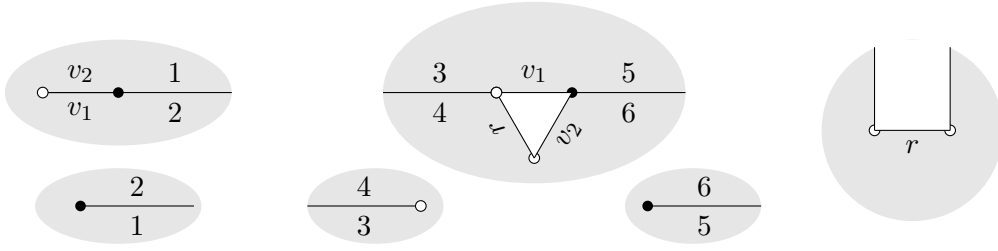


FIGURE 13. k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec un unique résidu non nul.

les mêmes conditions sur les angles et les longueurs que précédemment, de manière que le k -résidu associé à cette partie polaire soit R_p . Enfin on procède comme précédemment avec les pôles dont le k -résidu est nul. L'holonomie des liens selles au bord de ces domaines polaires est choisie de telle façon que l'on obtienne les ordres des zéros désirés. Puis on procède aux collages de manière analogue à précédemment.

La condition $\sum_{t+1}^{p_0} r_i \neq \sum_{p_0+1}^p r_i$ peut clairement toujours être satisfaite à l'exception des 2-résidus proportionnels à $(1, \dots, 1)$ dans le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4p' - 3, 4p' - 1; (-4^{2p'}))$.

Enfin, on montre par plomberie que l'application résiduelle $\mathfrak{R}^k(\mu)$ contient l'espace $\mathcal{R}(\mu) \setminus \mathbf{C} \cdot (1, \dots, 1)$ pour $n \geq 3$ zéros. C.Q.F.D.

Nous voudrions comprendre les cas où l'application résiduelle contient l'origine. Le cas d'un pôle a déjà été traité, ainsi nous supposons que le nombre de pôles est supérieur à deux. Si les différentielles ont $n \geq 3$ cela amène une combinatoire lourde. Nous ne traiterons donc que les strates avec $n = 3$. Si $n = 2$ on a le résultat suivant.

Lemme 4.7. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ ne contient pas $(0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe une k -différentielle ξ_0 dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ dont tous les k -résidus sont nuls. Pour tous les $i \in \{1, \dots, p\}$, nous créons une k -différentielle entrelacée de la façon suivante. Si b_i/k est pair, nous collons une différentielle de genre $g_i = b_i/2k$ avec un unique zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i . Si b_i/k est impaire, nous collons une différentielle de genre $g_i = (b_i + 1)/2k$ avec un zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i et un autre zéro d'ordre k . De plus, nous choisissons ces k -différentielles comme étant la puissance k ième d'une différentielle abélienne.

La k -différentielle entrelacée ainsi obtenue est de type (a_1, a_2, k^d) , où d est le nombre de b_i tels que b_i/k est impaire. Par le théorème principal de [BCGGM16b] (qui dans ce cas est un généralisation de la propriété 2.4 à plus de composantes), cette k -différentielle entrelacée est lissable dans la strate $\mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, k^d)$, avec $g = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{b_i+1}{2} \rfloor$.

Remarquons que

$$\dim \mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, k^d) = 2g + d - 1.$$

D'un autre côté, la dimension des k -différentielles entrelacées au bord que nous venons de construire (avec η_0 sur X_0 projectivisé) est donné par

$$-1 + \sum_{i>0, b_i/k \text{ pair}} 2g_i + \sum_{i>0, b_i/k \text{ impaire}} (2g_i + 1) = 2g + d - 1.$$

Ce lieu a la même dimension que la strate, ce qui contredit le fait que le bord d'une variété est de dimension strictement plus petite que l'intérieur. C.Q.F.D.

Maintenant nous considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2, a_3; -kl_1, \dots, -kl_p)$. Rappelons la notation $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$. Nous introduisons la notion de

décomposition admissible de μ qui permet de caractériser les strates qui possèdent une k -différentielle dont tous les k -résidus sont nuls. On commence par choisir un *zéro spécial* parmi les trois zéros tel que s'il existe un zéro d'ordre divisible par k , alors le zéro spécial est ce zéro. Par la suite, nous supposons que le zéro spécial est a_1 . On partitionne alors les pôles P_j en quatre ensembles S_0, S_{11}, S_{12} et S_{13} satisfaisant aux propriétés suivantes. On suppose que le cardinal de S_0 est égal à 1 ou 2. Si le cardinal de S_0 est 1, alors $S_{11} = \emptyset$. Pour chaque pôle P_t d'ordre $-k\ell_t$ dans S_{1j} avec $j \neq 1$ on associe un nombre $m_t^j \in \{1, \dots, \ell_t - 1\}$. Si le cardinal de S_0 est 1, alors nous associons à ce pôle d'ordre $-k\ell_0$ deux nombres $m_0^j \in \{0, \dots, \ell_0 - 1\}$ pour $j \in \{2, 3\}$ tels que $m_0^2 + m_0^3 \leq \ell_0 - 1$. Si S_0 contient deux pôles d'ordres respectifs $-k\ell_0$ et $-k\ell'_0$, alors on leur associe un nombre m_0^2 dans $\{0, \dots, \ell_0 - 1\}$ et un nombre m_0^3 dans $\{0, \dots, \ell'_0 - 1\}$. Les m_α^j forment une *décomposition admissible de μ* si $l_j = \sum_\alpha m_\alpha^j = l_j$ pour $j = 2, 3$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.8. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2, a_3; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ une strate de genre zéro non vide telle que $p \geq 2$. L'image de $\mathfrak{R}^k(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$ si et seulement s'il existe une décomposition admissible de μ .*

La preuve de ce lemme est similaire à celle de la condition donnée par l'équation 1.5 dans le cas abélien.

Démonstration. On commence par se donner une décomposition admissible de μ . La k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ dont tous les k -résidus sont nuls est la suivante. S'il y a un unique pôle dans S_0 , nous prenons une partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ où les v_i satisfont les conditions suivantes. On a les égalités $|v_1| = |v_2|$, $|v_3| = |v_4|$, $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$. Les angles à l'intersection de v_1 et v_2 , et de v_3 et v_4 respectivement, sont $\frac{2\pi(k+\bar{a}_i)}{k}$. On coupe cette surface le long de demi-droite partant de ces sommets et on colle un nombre de plans correspondant aux m_0^j . Puis on fait de même à l'intersection entre v_2 et v_4 pour obtenir un pôle d'ordre désiré. Pour chaque pôle de S_{1j} avec $j \geq 1$, on prend une partie polaire d'ordre $k\ell_t$ et d'ordre m_t^j associée à $(v; v)$ où v est la connexion de selle entre z_1 et z_j . Enfin on obtient la surface voulue en collant les bords par translation et rotation comme dans les preuves précédentes.

Dans le cas où il y a deux pôles dans S_0 , la construction est la suivante. On associe au premier de ces deux pôles une partie polaire associée à $(v_1, v_2; v)$ où les v_i sont comme ci-dessus et $v = v_1 + v_2$. On associe au second pôle la partie polaire associée à $(v; v_3, v_4)$. Pour les pôles de S_{11} , on prend une partie polaire associée à $(v; v)$ et on les colles de manière cyclique. Le reste de la construction est similaire à celle du paragraphe précédent.

Supposons maintenant qu'il existe une k -différentielle ξ ayant les propriétés souhaitées. Nous construisons une décomposition admissible de μ .

Le point crucial est de montrer qu'il existe deux zéros, disons z_2 et z_3 , de ξ non reliés entre eux par un lien selle. De plus, il n'y a de lien selle fermé contenant ces zéros. On utilise le fait que ξ_0 est obtenu en recollant des parties polaires. Comme la dimension de la préimage de l'origine par l'application résiduelle est 0, soit il existe un unique pôle dont la partie polaire est constituée de 4 segments, soit il existe deux pôles bordés par trois segments. Les autres pôles sont eux bordés de deux segments. Pour les pôles spéciaux, il y a deux domaines basiques (introduits dans la section 2.2) constitués de deux segments. Comme le k -résidu est nul, un domaine basique est positif et l'autre négatif. L'angle à l'intersection de ces segments est $\frac{2(k+\bar{a}_i)\pi}{k}$ pour deux $i \in \{1, 2, 3\}$. Remarquons en particulier, que les zéros associés ne peuvent pas être d'ordres divisibles par k . De cette description, on déduit qu'il ne peut pas exister un segment reliant ces zéros sur ξ ou de liens selles fermés.

La décomposition admissible de μ est alors donnée de la façon suivante. L'ensemble S_0 est formé des pôles ayant au moins trois segments bordant leurs parties polaires. Les ensembles S_{1j} sont constitués des pôles dont le bord de la partie polaire est constitué de segments reliant z_1 à z_j . Enfin, les m_t^j correspondent à 2π fois la contribution angulaire du pôle P_t à l'angle du zéro z_j . C.Q.F.D.

Ces conditions ne sont pas systématiquement satisfaites. On peut par exemple déduire sans problèmes le résultat suivant de la proposition 4.8.

Corollaire 4.9. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, \dots, a_3; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ une strate de genre zéro. Si $k \mid a_1$, alors pour $i = 2, 3$ on a $a_i \leq \sum k\ell_i - p$.*

Les strates avec $s \neq 0$. Ce paragraphe est dédié à la preuve du théorème 1.9. En particulier, on a les strates exceptionnelles suivantes.

Lemme 4.10. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4s' - 1, 4s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ ne contient pas $\mathbf{C}^* \cdot (0, 1, \dots, 1)$.*

L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ ne contient pas $\mathbf{C}^ \cdot (0, \dots, 0, 1, 1)$.*

Démonstration. Nous allons montrer dans le lemme 5.6 (évidemment sans utiliser ce résultat) que les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4s' - 1, 4s' + 1; (-2^{2s'})$ ne possèdent pas de différentielle avec résidu quadratique nul à tous les pôles.

Maintenant supposons qu'une différentielle ξ_0 de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4s' - 1, 4s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ possède les résidus quadratiques $(0, 1, \dots, 1)$. Dans ce cas, nous attachons une courbe elliptique munie d'une différentielle quadratique holomorphe au pôle d'ordre 4 de ξ_0 . Cette différentielle quadratique entrelacée peut être lissée sans modifier les résidus aux pôles doubles d'après le lemme 2.4. Cela aboutit à une contradiction.

Le second cas se traite de manière similaire en utilisant le lemme 5.12 disant que les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$ ne contiennent pas de différentielle quadratique dont les résidus quadratique sont $(1, \dots, 1)$. C.Q.F.D.

Nous considérons maintenant le cas des strates ayant à la fois des pôles d'ordres $-k$ et des pôles d'ordres supérieurs divisibles par k .

Lemme 4.11. *Mise à part pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4s' - 1; 4s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ et les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1; 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$, l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ avec $p, s \neq 0$ est surjective. Dans les deux cas restant, les complémentaires de $\mathbf{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$ et $\mathbf{C}^* \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$ dans leur espace résiduel respectif sont dans l'image des applications résiduelles.*

La preuve de ce résultat se fait par étapes. Nous considérons d'abord les strates avec un unique pôle d'ordre supérieur qui est égale à $2k$. Puis nous en déduisons le cas où l'unique pôle est d'ordre $-k\ell$ avec $\ell > 2$. Puis nous en déduisons le cas d'un nombre de pôles arbitraires.

Démonstration. Rappelons la notation $a_i = k\ell_i + \bar{a}_i$ où $-k < \bar{a}_i < 0$. Nous supposons tout d'abord qu'il existe un unique pôle d'ordre supérieur et que celui-ci est d'ordre $-2k$. Dans ce cas nous prenons une partition des pôles d'ordre $-k$ de cardinal l_1 et $l_2 + 1$. Sans perte de généralité, nous supposons que $l_1 \leq l_2 + 1$. Nous noterons par (R_1, \dots, R_{l_1}) les k -résidus des l_1 pôles, par (R_{l_1+1}, \dots, R_s) les $l_2 + 1$ suivants et par R le k -résidu du pôle du pôle d'ordre $-2k$.

Afin de construire la surface désirée, nous procédons de la manière suivante. Les $l_2 + 1$ racines r_i des R_i et la racine r de R sont telles que $s_2 := r + \sum_{i>l_1} r_i$ soit de norme maximale. Sans perte de généralité on peut supposer que $s_2 \in \mathbf{R}_+$. Maintenant on peut prendre les l_1 premiers résidus telle que la somme $s_1 := \sum_{i \leq l_1} -r_i$ soit de norme maximale

et pour cette norme, d'argument minimal. Par hypothèse $|s_1| \leq |s_2|$ et cette inégalité est une égalité si et seulement si $R = 0$, $l_1 = l_2 + 1$, les l_1 premiers k -résidus sont égaux à $(-1)^k$ et les $l_2 + 1$ derniers à 1.

Si on n'est pas dans le cas d'égalité, alors la construction est la suivante. Notons par v_1 et v_2 les deux segments d'égale longueur, d'angle au dessus de leur intersection égal à $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$ et de somme $s_2 - s_1$. Il suffit alors de prendre la partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, -r_1, \dots, -r_{l_1}, v_2; r_{l_1+1}, \dots, r_s)$. Puis on identifie les deux segments v_i ensemble par rotation (et translation) et on colle des demi-cylindres infinis aux autres segments. Par construction, cette k -différentielle possède les invariants locaux souhaités.

Maintenant, il reste à considérer le cas d'égalité dans les cas $k \geq 3$ (en effet, pour $k = 2$ ce sont les cas exceptionnels du lemme 4.10). Dans ce cas, il suffit de remplacer l'une des racine de $(-1)^k$ par une autre racine. La construction précédente donne une k -différentielle avec les invariants locaux souhaités.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter les cas des strates ayant un unique pôle d'ordre supérieur $-k\ell$ avec $\ell \geq 3$. Pour ce faire on utilise une méthode similaire à celle utilisée dans la preuve du lemme 4.4. Plus précisément, on se donne la strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, a_2; -k\ell; (-k^s))$. Il existe une différentielle ξ' dans $\Omega^k \mathcal{M}_g(a'_1, a'_2; -2k; (-k^s))$ où $a'_i = a_i - kt_i$ avec $t_1 + t_2 = \ell - 2$. On peut de plus choisir les t_i de telle sorte que la strate ainsi obtenue n'est pas une strate exceptionnelle. Puis nous faisons une demi-fente infinie à partir de chacune des singularités conique de ξ' . Enfin nous collons de manière cyclique t_i plans fendus de la même façon. La k -différentielle ainsi obtenue possède clairement les invariants locaux souhaités.

Il reste à traiter le cas des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p; (-k^s))$ avec $p \geq 2$ et $s \geq 1$. Nous commençons par le cas où tous les pôles d'ordres b_i possèdent un k -résidu nul. Nous procédons par récurrence sur le nombre de pôles d'ordre $b_i = kl_i$. On prend $\ell_{p,1}$ et $\ell_{p,2}$ dans \mathbf{N} tels que $\ell_{p,1} + \ell_{p,2} = \ell_p$, on a $a'_i := a_i - k\ell_{p,i} > -k$ et enfin si $a_1 > a_2$, alors $\ell_{p,1} \neq 0$. Nous considérons la state $\Omega^k \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -b_1, \dots, -b_{p-1}; (-k^s))$. Par récurrence, l'application résiduelle de cette strate est soit surjective, soit une des strates exceptionnelles du lemme 4.10. Si on est dans ce dernier cas, remarquons que si $b_2 \neq 4$, alors en permutant le rôle de b_1 et b_2 , on obtient une strate dont l'application résiduelle est surjective. Si $b_1 = b_2 = 4$, alors il suffit de modifier les $\ell_{p,i}$ pour obtenir une strate dont l'application résiduelle est surjective. Par exemple, dans le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4s' + 3; 4s' + 1; -4, -4; (-2^{2s'}))$ il faut prendre $\ell_{n,1} = 0$ où $a_1 = 4s' + 3$ est le pôle d'ordre supérieur.

Nous expliquons maintenant la construction géométrique qui permet de passer d'une strate à l'autre. Si $\ell_{p,1} = 0$, alors nous prenons une connexion de selle d'holonomie v reliant le zéro d'ordre a_2 à lui même. Remarquons que dans le cas spécial de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4s' + 3; 4s' + 1; -4, -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 2$, une telle connexion de selle existe. Coupons la surface le long de ce lien selle. Prenons une partie triviale d'ordre b_i associée à $(v; v)$ Nous collons le bord supérieur (resp. inférieur) de cette partie polaire à la partie inférieur (resp. supérieur) du bord créé par le coupage. La surface ainsi créée satisfait les propriétés souhaitées. Si $\ell_{p,1}$ et $\ell_{p,2}$ sont non nuls, alors on coupe la surface le long d'un lien selle entre les deux zéros. La construction est ensuite similaire avec une partie polaire d'ordre b_i et de type ℓ_1 associée à $(v; v)$.

Pour terminer, nous supposons qu'il existe des pôles d'ordre b_i avec un k -résidu non nul. Dans ce cas nous sélectionnons le pôle d'ordre b_p (dont le k -résidu sera supposer non nul). Nous faisons à ce pôle la construction de la première partie de cette preuve avec les k -résidus des pôles d'ordres b_i . Comme ce pôle possède un k -résidu non nul, cette construction est toujours réalisable. La surface souhaitée est obtenue par collage des parties polaires aux segments correspondants. C.Q.F.D.

Enfin, nous traitons le cas des strates avec $n \geq 3$ zéros.

Lemme 4.12. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -kl_1, \dots, -kl_p; (-k^s))$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. La preuve ce fait par éclatement de zéros. Toutefois, dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir une k -différentielle dans une strate en éclatant un zéro d'une k -différentielle primitive. Mais grâce à la multiplicativité des k -résidus (équation (2.1)) il suffit de vérifier que l'on peut partir d'une strate dont les éléments ne sont pas la puissance k ième de différentielles abéliennes. Cela revient à vérifier que l'on peut additionner deux a_i de telle façon que la somme ne soit pas divisible par k . Nous laissons le lecteur vérifier cette propriété élémentaire. On obtient donc la surjectivité de l'application résiduelle de toutes les strates, sauf éventuellement celles de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -4; (-2^{2^s}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-4^a); (-2^2))$, en combinant l'éclatement des zéros avec les lemmes 4.11 et 4.4. Mais pour ces strates, on peut toujours partir d'une strate dont l'application résiduelle est surjective. C.Q.F.D.

4.3. k -différentielles dont les pôles sont d'ordre $-k$. Ce cas est, comme dans le cas abélien, très subtil. En particulier, le cas quadratiques possède de nombreuses différences avec le cas des k -différentielles pour $k \geq 3$. C'est pourquoi nous donnons tout d'abord quelques généralités communes à tous les cas. Puis nous traitons le cas des différentielles quadratiques. Enfin nous étudierons le cas des k -différentielles pour $k \geq 3$.

Généralités. Commençons par remarquer que les strates avec un unique zéro sont vides par le lemme 4.1. Nous nous concentrerons sur le cas des strates avec 2 zéros. Le cas des strates avec plus de zéros se traiteront par éclatement.

Nous notons S la surface plate associée à une k -différentielle ξ d'une strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2; (-k^s))$ et dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) . Nous supposons que les $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ vérifient $-k < \bar{a}_1 < -k/2 < \bar{a}_2 < 0$. Remarquons que l'on a l'égalité $s = l_1 + l_2 + 1$.

Nous construirons des k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ de la façon suivante. On prend un $s + 2$ -gone qui a pour arêtes $r_1, \dots, r_s, t_1, t_2$, avec r_i une racine k ième de R_i et $t_2 = \zeta t_1$ avec ζ une racine k ième primitive de l'unité. On suppose de plus que les arêtes t_i partitionnent les r_i en deux ensembles E_1 et E_2 de cardinal respectif e_i entre 0 et s . Nous notons P_1 le point d'intersection $t_1 \cap r_i \subset E_1$ et Q_1 le point $t_2 \cap r_i \subset E_1$. Enfin l'un des deux cas suivant doit être satisfait.

- C1) On a les égalités $e_1 = l_1$ et $e_2 = l_2 + 1$ et la somme des angles du polygone à P_1 et Q_1 est strictement supérieure à 2π .
- C2) On a les égalités $e_1 = l_1 + 1$ et $e_2 = l_2$ et la somme des angles du polygone à P_1 et Q_1 est strictement inférieure à 2π .

La *construction (Ci)* désigne le fait de prendre un polygone de type (Ci) et de former une k -différentielle en collant les deux segments t_i par rotation et des demi-cylindres infinis aux segments r_i . Les deux cas sont illustrés par la figure 14, où les segments t_1 sont tracés normalement, les r_i sont en segments hachés et les demi-cylindres sont pointillés.

Nous donnons maintenant une condition suffisante (non nécessaire) sur l'existence de tels polygones. Nous commençons par le cas où l'un des zéros est d'ordre entre $-k$ et 0.

Lemme 4.13. *Soit (R_1, \dots, R_s) un s -uplet de nombres complexes non nuls. Supposons que la somme $t := \sum_{i \neq 1} r_i$ satisfasse les propriétés suivantes :*

- i) $0 < |t| \leq |r_1|$;
- ii) $t \neq \zeta r_1$ pour toutes les racines k ième de l'unité ζ ;
- iii) si $s \geq 4$, alors les r_i ne sont pas tous colinéaires pour $i \geq 2$.

Alors il existe une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ avec $a_2 < 0$ dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

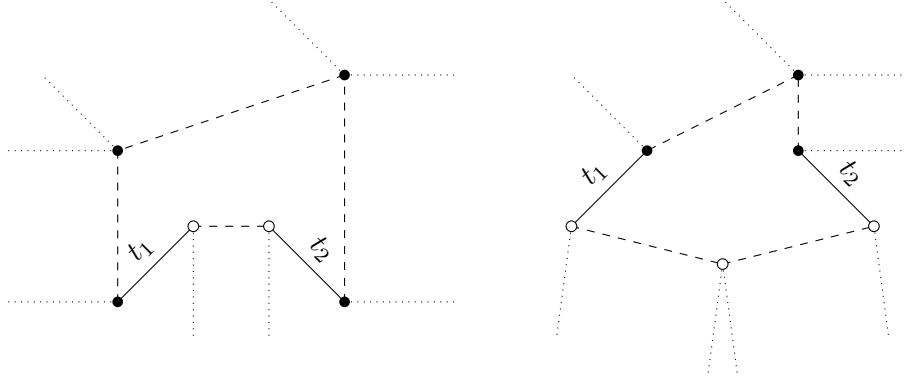


FIGURE 14. Les constructions (C1) à gauche et (C2) à droite sont illustrées dans le cas de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 5; (-4^4))$

Démonstration. Nous construisons un polygone de type (C1) de la façon suivante. Partons de l'origine de \mathbf{C} et prenons l'arête r_1 dans \mathbf{C} . Considérons des racines r_i de R_i satisfaisants aux conditions du lemme 4.13. Quitte à multiplier tous les r_i par une racine k ième de l'unité, nous pouvons supposer que l'argument de la somme t des r_i est dans $[\arg(r_1) - \frac{2\pi}{k}, \arg(r_1)]$. Prenons les arguments de r_i dans $[\arg(r_1) - \pi, \arg(r_1) + \pi]$ et rangeons ces racines par argument croissant.

Nous construisons un polygone intermédiaire de la façon suivante. Nous concaténons les r_i depuis l'origine jusqu'au point final t dans cet ordre. Puis nous relient les points t à r_1 par deux segments v_1 et v_2 d'égale longueur qui font un angle (vu de l'intérieur du polygone) de $(a_2 + k)\frac{2\pi}{k}$. Ces deux segments peuvent couper le segment r_1 , mais ne rencontrent aucun sommet du polygone.

Le polygone final est obtenu à partir de ce polygone de la façon suivante. Si les v_i ne rencontrent pas r_1 , alors il n'y a rien à faire. Dans le cas contraire, on concatène les segments dans l'ordre suivante. Tout d'abord les r_i pour $i \geq 2$, puis v_1 puis $-r_1$ et enfin v_2 . Le point (iii) implique que ce polygone n'est pas dégénéré et la construction à partir du cas (C1) permet d'obtenir la k -différentielle souhaitée. C.Q.F.D.

Nous donnons l'analogie du lemme 4.13 pour les strates dont les zéros sont d'ordres a_i positifs. De plus, nous nous restreindrons au cas $k \geq 3$.

Lemme 4.14. Soient $(R_1, \dots, R_s) \in (\mathbf{C}^*)^s$ et $S := \Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ une strate. S'il existe deux sommes $s_1 := \sum_{i \leq l_1} r_i$ et $s_2 := \sum_{i > l_1} r_i$ telles que

$$i) 0 < |s_1| < q|s_2|, \text{ avec } q = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour } k \geq 4 \text{ et } q = \frac{1}{2} \text{ pour } k = 3,$$

ii) les r_i ne sont pas tous colinéaires dans le cas $s \geq 4$,

alors il existe une différentielle dans la strate S telle que les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

Démonstration. La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 4.13. Nous montrons que sous les hypothèses de ce lemme, on peut construire une k -différentielle via un polygone du second type. Prenons les $l_2 + 1$ racines r_i telles que leur somme est s_2 . Prenons l'argument de ces racines dans $[\arg(s_2) - \pi, \arg(s_2) + \pi]$ et concaténons les par argument décroissant. Dans la suite, on supposera sans perte de généralité que $\arg(s_2) = 0$. Maintenant si k est pair, on concatène les r_i de s_1 par argument croissant. Si k est impair, on concatène les segments $\zeta_{2k} r_i$ pour ζ_{2k} une racine $2k$ ième primitive de l'unité. Quitte à multiplier tous les r_i pour $i \leq l_1$ par une même racine k ième de l'unité, l'argument de s_1 appartient au segment $[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}]$.

On place alors les segments s_1 et s_2 de la façon suivante. On peut relier les points initiaux et finaux entre eux par deux segments v_1 et v_2 d'égale longueur. De plus, la somme des

angles du polygone où les v_i rencontrent les segments de s_2 est $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. L'inégalité sur les longueurs des s_i implique que le polygone ainsi obtenu est non dégénéré. En effet, la partie imaginaire des segments v_i est strictement positive. Les collages donnant la surface plate sont alors ceux décrits dans le cas (C1). C.Q.F.D.

Pour terminer ce paragraphe, nous voudrions insister sur le fait que les constructions ci-dessus ne sont pas les seules pour obtenir de telles k -différentielles. Toutefois, elle permettent de construire la majorité de celles-ci.

Les strates quadratiques. Dans ce paragraphe, nous regardons l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $a_i \geq -1$ et au moins deux a_i sont impairs. Nous considérons pour commencer le cas de deux zéros.

Dans ce cas, il existe deux familles de strates spéciales données dans le lemme suivant. Rappelons que trois nombres sont triangulaires s'ils sont le carré de nombres de somme nulle (voir définition 1.12).

Lemme 4.15. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s'-1, 2s'+1; (-2^{2s'+2}))$ ne contient pas les résidus quadratiques de la forme $(1, \dots, 1, R, R)$ avec $R \in \mathbf{C}^*$.*

L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s'-1, 2s'-1; (-2^{2s'+1}))$ ne contient pas les résidus quadratiques de la forme $(R_1, \dots, R_1, R_2, R_3)$ où les nombres R_1, R_2, R_3 sont triangulaires.

Démonstration. Nous montrerons que les strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s'-1, 2s'+1; (-2^{2s'}))$ ne contiennent pas de différentielle dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$ dans le lemme 5.12. Supposons qu'il existe une différentielle quadratique dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s-1, 2s+1; (-2^{2s'+2}))$ dont les 2-résidus sont $(1, \dots, 1, R, R)$. Alors en collant les deux pôles ayant pour résidu quadratique R , on obtient une différentielle quadratique entrelacée. Celle-ci est lissable sans modifier les autres résidus par le lemme 2.3. Cela implique la contradiction souhaitée.

Nous traitons maintenant le cas où les résidus quadratiques sont triangulaires. Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ avec ces invariants locaux. L'homologie $H_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}; z_1, z_2; \mathbf{C})$ est engendrée par trois cycles γ_i tournant autour des p_i et un cycle γ_{12} entre z_1 et z_2 . Voir la figure 15.

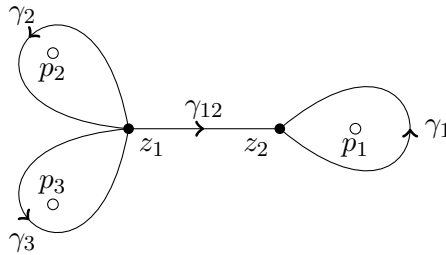


FIGURE 15. Les générateurs de $H_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}; z_1, z_2; \mathbf{C})$

Nous découpons la surface plate définie par ξ le long de γ_{12} , obtenant ainsi une surface dont le bord a deux composantes. Nous prenons une racine ω_ξ de ξ sur $X \setminus \gamma_{12}$. Nous noterons r_i l'holonomie de γ_i et r_{12} l'holonomie des deux portions du bord pour l'orientation induite par la surface. On a alors $r_{12} + r_1 + r_{12} + r_2 + r_3 = 0$. Comme les résidus quadratiques sont triangulaires, on a $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 = 0$. Si tous les signes sont positifs (ou négatifs), on obtient $r_{12} = 0$ et donc une contradiction.

Il reste à considérer le cas où $-r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (à changement de signes global près). On obtient alors $r_{12} = r_1$. Sans perte de généralité, nous supposons que les γ_i sont des géodésiques pour la métrique induite par ω_ξ . Le bord des cylindres demi-infini associés aux pôles est constitué d'une ou plusieurs connexions de selles. Comme l'angle des singularités

coniques z_i est 3π , l'un des z_i , disons z_1 borde au moins un domaine polaire et z_2 au moins deux, comme schématisé sur la figure 15. Donc, le complémentaire des domaines polaires, qui correspond à la partie non bornée de la figure 15, est un pentagone (éventuellement dégénéré) dont les côtés sont donnés par les r_i et deux r_{12} . Les deux pentagones possibles sont représentés dans la figure 16.



FIGURE 16. Les deux possibilités pour le polygone formé par les segments r_i .

Mais la surface obtenue par les recollements expliqués au début de cette section à partir de ces deux pentagones ne sont pas dans la strate désirée. Celle obtenue à partir du pentagone de gauche est le carré d'une différentielle abélienne. La différentielle quadratique obtenue à partir de celui de droite possède une singularité d'ordre -1 et une autre d'ordre 3 . Donc il n'y a pas de différentielle quadratique dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ dont les résidus sont triangulaires.

Supposons qu'il existe une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s' \geq 2$ dont les 2-résidus sont $((R_1)^{2s'-1}, R_2, R_3)$ (avec les R_i triangulaires). Par la même considération sur les angles des singularités coniques, on peut supposer que z_1 borde s' domaines polaires et z_2 en borde $s' - 1$. Les domaines polaires de résidus R_2 et R_3 ne sont pas bordés pas le même zéro. En effet, si c'était z_1 , alors la somme des bords des domaines polaires bordés par z_1 ne pourrait pas être supérieur à celle de ceux bordés par z_2 . Comme cette condition est nécessaire pour obtenir des ordres égaux, on obtient une contradiction. S'ils bordaient z_2 , alors la somme des bords des domaines polaires z_2 serait égale à celle de ceux bordés par z_1 moins $2r_1$. Cela est clairement impossible pour obtenir les singularités coniques souhaitées. On peut donc supposer que les pôles dont les 2-résidus sont R_2 et R_3 bordent deux zéros distincts. Dans ce cas on peut retirer à la surface plate associée à η une paire de pôles de résidu R_1 bordant chacun des deux zéros. On en déduit une contradiction par récurrence sur le nombre de pôles. C.Q.F.D.

Nous montrons maintenant que ces cas sont très spéciaux.

Lemme 4.16. *Soit $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ une strate quadratique. L'image par l'application résiduelle de cette strate contient tous les s -uplets dont les éléments n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine, à l'exception de ceux donnés dans le lemme 4.15.*

Démonstration. Par éclatement de zéros, il suffit de traiter le cas de 2 zéros d'ordres impair. On écrit comme précédemment $a_i = kl_i - 1$ et on suppose que $l_1 \leq l_2$. Nous allons partitionner les pôles en deux sous-ensembles de cardinaux l_1 et $l_2 + 1$. Les différentielles quadratiques avec les invariants souhaités seront données par la construction (C1) de l'introduction de cette partie.

On commence par le cas où la différentielle est dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2s' - 1, 2s' + 1)$ avec pour résidus quadratiques $(1, \dots, 1, R, R)$ où $R \notin \mathbf{R}_+$. Dans ce cas on part de la concaténation de deux segments r puis des segments 1. On note B le point initial de la concaténation et F le point final. Cette construction est représentée à gauche de la figure 17. Supposons que $l_1 \leq s' - 2$. On fait une translation des l_1 derniers segments de la concaténation par le vecteur $v = \frac{1}{2}(B - F)$. On peut alors relier les deux points initiaux et finaux de ces deux segments brisés par deux segments égaux à v . On fait alors la construction de type (C1) à partir de ce polygone.

Prenons un s -uplet de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$ où $R \notin \mathbf{R}_+$. On construit une 2-différentielle ayant ces résidus dans toutes les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$. Il suffit de traiter les cas où $s_2 = 1$ et où $s_i \geq 3$ pour $i = 1, 2$. Dans le cas où $s_1 = 1$, il suffit de faire la construction du paragraphe précédent avec un unique r au début de la concaténation. Dans le cas où $s_1, s_2 \geq 3$, on a deux cas à traiter. Dans le cas où l'un des s_i est impair, on donne la construction suivante. On concatène $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois 1 puis $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ fois r , puis $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois -1 et enfin $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ fois $-r$. Cette construction est représentée par le dessin du milieu de la figure 17. Dans le cas où les s_i sont tous les deux d'ordres paires, on concatène $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor - 1$ fois -1 puis $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor - 2$ fois r , puis $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois 1, puis $\lfloor \frac{s_2}{2} + 2 \rfloor$ fois $-r$ et enfin une fois -1 . Cette construction est représentée par le dessin à droite de la figure 17. Dans les deux cas, la construction du paragraphe précédent permet d'obtenir les différentielles quadratiques désirées.

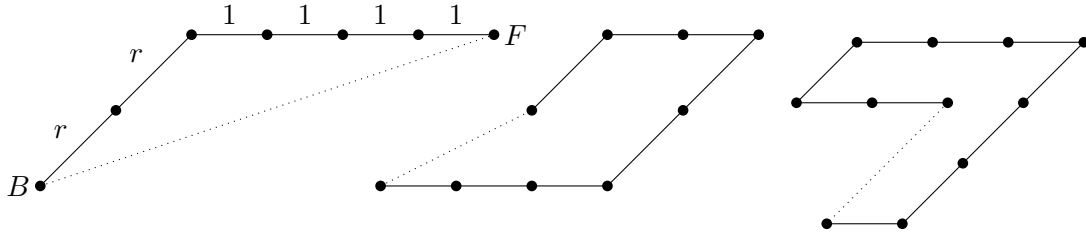


FIGURE 17. Les trois segments brisés obtenu pour construire les résidus de la forme $(1, \dots, 1, R, \dots, R)$.

On considère maintenant le cas où les résidus sont sur deux rayons mais que les résidus sur un même rayon ne sont pas égaux entre eux. Nous noterons ces résidus quadratiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}, \beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ avec $\alpha_i \in \mathbf{R}_+^*$ et $\beta_j \in \mathbf{R}_+^*$. S'il existe un unique résidu le long d'un rayon, i.e. $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, alors on peut faire la construction (C1) comme expliqué au paragraphe précédent. On supposera donc que $s_1, s_2 \geq 2$.

On commence par le cas général où il existe deux résidus quadratiques non égaux le long de chaque rayon, i.e. il existe $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$ et $\beta_{j_1} \neq \beta_{j_2}$. On partitionne les résidus $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1})$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ satisfaisant les conditions suivantes. Le cardinal de $\mathcal{R}_{1,1}$ est supérieur à $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ et la somme des racines des ces 2-résidus est strictement inférieur à celles de $\mathcal{R}_{2,1}$. De plus, on suppose que si $\mathcal{R}_{2,1}$ a au moins deux éléments, alors le premier est le plus petit. On partitionne de même les 2-résidus $(\beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ en deux sous ensembles $\mathcal{R}_{i,2}$ tels que le cardinal de $\mathcal{R}_{1,2}$ est supérieur à $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$.

On concatène alors les racines des 2-résidus de $\mathcal{R}_{1,1}$, puis celles de $\mathcal{R}_{1,2}$, puis l'opposé de celles de $\mathcal{R}_{2,1}$ et l'opposé de celles de $\mathcal{R}_{2,2}$. On peut alors sélectionner les l_1 premier résidus et leur faire faire une translation de la moitié du segment entre le point initial et le final de la concaténation. La construction (C1) à partir de ce polygone fonctionne clairement pour $l_1 < \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$. Remarquons que comme le premier résidu du $\mathcal{R}_{2,1}$ est de longueur minimale la construction fonctionne aussi dans le cas $l_1 = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$.

Considérons le cas où tous les résidus quadratiques sont égaux entre eux sur un rayon. La construction est similaire à celle que nous venons de faire avec les $\mathcal{R}_{i,2}$ constitués des résidus du rayon où ils sont égaux. Le seul cas qui pose problème est lorsque le nombre de résidus sur ce rayon est pair. Dans ce cas la construction précédente fonctionne dans le cas $l_1 = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ si et seulement si le cardinal de $\mathcal{R}_{1,1}$ est $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ et la distance entre les points d'arrivée et de départ de la concaténation est inférieur à deux fois la longueur du premier résidu de $\mathcal{R}_{2,1}$. Si ce n'est pas le cas, on peut échanger le plus grand résidu de l'ensemble $\mathcal{R}_{1,1}$ avec le plus petit de $\mathcal{R}_{2,1}$ et conclure comme précédemment.

Considérons maintenant le cas où les R_i sont sur trois rayons différents. Dans un premier temps nous supposons que les $s = s_1 + s_2 + s_3$ résidus quadratiques sont de la forme $((R_1^{s_1}), (R_2^{s_2}), (R_3^{s_3}))$ avec les R_i triangulaires. Si $s_1 = s_2 = s_3$, on procède de la façon

suivante. On concatène s_1 fois r_1 , puis s_2 fois r_2 , puis une fois $-r_1$ et enfin s_3 fois r_3 . Le segment brisé ainsi obtenu est représenté à gauche de la figure 18. La construction des paragraphes précédents donne les différentielles quadratiques souhaitées. Si $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ avec au moins une inégalité stricte. On concatène s_2 fois r_2 , puis $\lceil \frac{s_1}{2} \rceil$ fois r_1 , puis s_3 fois r_3 et enfin $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois r_1 . Cela est représenté au centre de la figure 18. On conclut alors comme précédemment. De plus, ces constructions se généralisent sans difficultés aux cas où les k -résidus sont sur plus de quatre rayons et qu'une somme de racines k ième de ceux-ci est nulle.

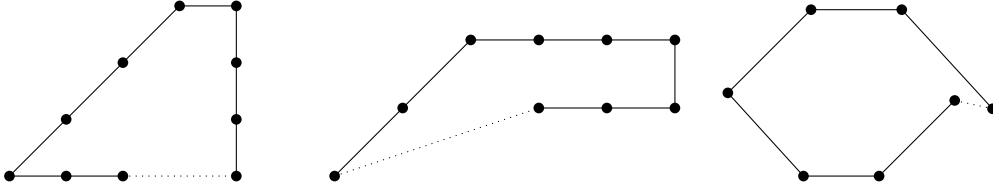


FIGURE 18. Les segments brisés obtenu pour construire les résidus sur trois rayons distincts.

Maintenant si les résidus sont sur trois rayons distincts, mais ne sont pas de la forme précédente. On les notera $(R_{1,1}, \dots, R_{1,s_1}, R_{2,1}, \dots, R_{2,s_2}, R_{3,1}, \dots, R_{3,s_3})$, où les $R_{i,j}$ sont sur un même rayon à i fixé. Pour chaque i , on partitionne $\{R_{i,1}, \dots, R_{i,s_i}\}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ et $\mathcal{R}_{i,2}$ vérifiant les propriétés suivantes. La somme des racines dans $\mathcal{R}_{i,1}$ est strictement inférieure à celle des racines dans $\mathcal{R}_{i,2}$. De plus la cardinalité de $\mathcal{R}_{i,1}$ est supérieur à $\frac{n}{2} - 1$. Il est clair que l'on peut toujours trouver de telles partitions. Maintenant, on concatène pour $i = 1, 2, 3$ les racines sur un même rayon des résidus quadratiques des $\mathcal{R}_{i,1}$ puis les racines des $\mathcal{R}_{i,2}$ sur l'autre rayon. Cela est montré à droite de la figure 18. Si au moins deux des s_i sont supérieurs ou égaux à 3, alors cela permet de conclure par la construction précédente. Remarquons que ces constructions ne sont pas spécifiques au cas de trois rayons. Elles se généralisent sans difficultés aux cas où les résidus sont sur plus de quatre rayons. Si pour deux i on a $s_i \leq 2$, alors on peut adapter la construction à partir de la ligne brisée représentée au centre de la figure 18 afin d'obtenir les différentielles souhaitées.

Considérons maintenant les derniers cas où les R_i appartiennent à au moins quatre rayons différents. Tout d'abord les cas où les s résidus quadratiques R_i sont sur s rayons distincts et vérifient pour un choix de racines $\sum r_i = 0$. Nous supposons de plus que la concaténation des r_i pour i croissant est un polygone convexe. Un exercice élémentaire permet de vérifier qu'il existe au moins $s_1 := \lceil \frac{s}{2} \rceil$ racines r_i dont les arguments sont contenus dans un segment de longueur π . Nous supposons qu'il s'agit des résidus r_1, \dots, r_{s_1} . Nous considérons alors la concaténation $-r_{s_1}$ puis r_2, \dots, r_{s_1-1} puis $-r_1$ puis r_{s_1+1}, \dots, r_s . Cette construction est représentée dans la figure 19 où les résidus r_1, \dots, r_{s_1} sont les trois résidus supérieurs. À partir de ce segment brisé, la construction des paragraphes précédents



FIGURE 19. Les segments brisés obtenu pour construire les résidus sur trois rayons distincts.

permet d'obtenir une différentielle ayant les résidus quadratiques R_i dans toutes les strates

$\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$. En effet, la condition sur les angles assure que les polygones ainsi obtenu n'ont pas de points d'auto-intersection.

Les cas où il y a plusieurs résidus quadratiques sur le même rayon peut se traiter de manière analogue aux cas de trois rayons. Nous ne donnerons donc pas les détails de ces constructions.

Pour finir, nous regardons les cas le plus général où les résidus sont sur s rayons et il n'existe pas de somme des racines qui soit nulle. Dans ce cas, nous pouvons concaténer les racines de telle sorte que la différence $v := F - B$ entre le point initial B et final F de la concaténation est minimale. Pour construire, une différentielle dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$, on procède alors de la sorte. On considère les racines r_i et r_{i+1} telles que $\arg(r_i) \leq \arg(-v) \leq \arg(r_{i+1})$. On prend alors l_1 racines telles que ces racines forment deux lignes brisées qui partent des points de départ et d'arrivée. De plus, ces deux lignes brisées ne peuvent pas contenir r_i ou r_{i+1} . S'il y a deux lignes brisée, on les colles en leur faisant une translation de vecteur $v/2$ à celle partant de B et $-v/2$ à celle partant de F . Sinon on fait une translation de v si la ligne brisée part de B et $-v$ si elle part de F . La construction des paragraphes précédent permet alors de conclure. C.Q.F.D.

Nous nous intéressons maintenant au cas des résidus quadratiques qui appartiennent tous à un même rayon issu de l'origine. Nous énonçons tout d'abord le cas où l'un des deux zéros est d'ordre -1 .

Proposition 4.17. *Soient $\Omega^2\mathcal{M}_0(-1, 2s - 3; (-2^s))$ et $R := (R_1, \dots, R_s) \in (\mathbf{R}_+^*)^s$. Le s -uplet R appartient à l'image de l'application résiduelle de cette strate si et seulement il existe un graphe associé aux $r := (r_1, \dots, r_s; -r_s, \dots, -r_1)$ qui est un graphe de connexion symétrique.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un graphe associé aux résidus r qui soit un graphe de connexion symétrique. On peut alors obtenir une différentielle symétrique dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(2s - 2; (-1^{2s}))$ avec ces résidus. Le quotient de cette différentielle par la symétrie est la différentielle souhaitée.

Réciproquement, supposons que (r_1^2, \dots, r_s^2) est dans l'image de l'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(-1, 2s - 3; (-2^s))$. Alors le revêtement canonique de la différentielle quadratique correspondante est une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_0(2s - 2; (-1^{2s}))$ dont les résidus sont r . Le graphe associé à cette différentielle satisfait clairement aux hypothèse du lemme. C.Q.F.D.

Le cas des strates où les deux zéros sont positifs et les résidus sont sur le même rayon est très technique. On peut le traiter via l'existence de graphes de connexions généralisés qui sont de genre 1. Toutefois la combinatoire devient extrêmement complexe et une compréhension précise de ce nécessiterait un autre article. Nous nous contenterons dans la suite de résultats partiels pour $n \geq 3$ zéros. Nous pouvons montrer la surjectivité de l'application résiduelle dans quelques strates. Toutefois, elle n'est en général pas surjective et il semble délicat d'obtenir une caractérisation précise de l'image.

Nous prouvons la proposition 1.11 qui donne la surjectivité de l'application résiduelle de certaines strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$. Rappelons la notation $a_i = 2l_i - \delta_i$ avec $\delta_i \in \{0, 1\}$ que nous utilisons tout du long de cette section.

Preuve de la proposition 1.11. Nous commençons par montrer la surjectivité dans le cas où $n \geq 4$ et au moins quatre a_i sont impairs. On commence par supposer que $n = 4$ et les a_i sont tous impairs. Les cas avec $n > 4$ s'obtient alors par explosion de zéros. Nous savons que le résultat est vrai pour tous les résidus quadratiques qui ne se trouvent pas sur un unique rayon. Dans la suite nous supposons donc que les résidus quadratiques sont réels positifs. On partitionne alors les résidus en quatre sous-ensembles \mathcal{R}_i de cardinaux

respectifs l_j . On choisit un segment s_1 réel tel que

$$S := 2s_1 + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i} > 0.$$

Enfin on choisit deux segments s_2 et s_3 non réels tels que

$$2 \sum_{j=1,2,3} s_j + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i}.$$

De plus, on suppose que la partie réelle de s_2 est égale à $-\frac{S}{4}$. On forme alors le polygone schématisé à gauche de la figure 20. Les pointillés sont constitués de la concaténations des r_j dans les \mathcal{R}_i . On obtient la différentielle quadratique souhaitée en collant les s_i deux à deux et des demis-cylindres infinis aux segments r_i .

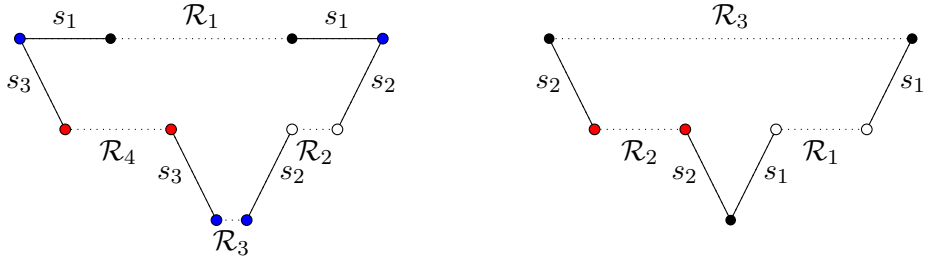


FIGURE 20. Le polygone pour obtenir une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_4; (-2^s))$ à gauche et de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_3; (-2^s))$ avec a_3 pair à droite.

Nous prouvons maintenant la surjectivité de l'application résiduelle dans le cas où $n = 3$ et $a_1 + a_2 < a_3$ avec a_3 pair. Il suffit de considérer les résidus quadratiques qui sont sur le même rayon. On forme trois sous-ensembles \mathcal{R}_i des résidus de cardinales respectives l_1 , l_2 et $l_3 + 1$. Ces ensembles sont choisis de telle sorte que

$$\sum_{R_i \in \mathcal{R}_3} \sqrt{R_i} > \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \sqrt{R_i}.$$

Remarquons que cela est toujours possible car $a_1 + a_2 < a_3$ implique $l_3 + 1 > l_1 + l_2$. Puis on forme le polygone représenté à droite de la figure 20. Les pointillés sont constitués de la concaténations des r_j dans les \mathcal{R}_i . On obtient la différentielle quadratique souhaitée en collant les s_i deux à deux et des demis-cylindres infinis aux segments r_i . C.Q.F.D.

Notons que le cas où $n \geq 4$ et le nombre de a_i impair est 2 ne peut pas s'obtenir par la preuve précédente. En effet, l'éclatement augmente le nombre de zéros d'ordres impairs.

Les strates de k -différentielles avec $k \geq 3$. Dans ce paragraphe, nous traitons le cas des k -différentielles avec $k \geq 3$. Nous montrons la présence de quelques strates sporadiques liées à la structure de réseaux des racines k ième de l'unité pour $k = 3, 4, 6$. Dans le cas de deux zéros, nous traitons les cas où l'un des deux zéros est négatif puis ceux où les deux zéros sont positifs. Enfin nous traitons le cas des strates avec plus de trois zéros.

Nous prouvons le théorème 1.14 dans le cas des strates où un zéro est d'ordre négatif. Rappelons que ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans les cas listés de (1) à (5). La preuve, une récurrence sur le nombre de pôles de la strate, repose sur le lemme 4.13 donnant une condition suffisante pour construire de telles k -différentielles.

Preuve du théorème 1.14, un zéro est d'ordre négatif. Nous traitons tout d'abord le cas simple où $-k < a_1 < -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Prenons des racines k ième r_i de R_i satisfaisant aux conditions suivantes. La somme des r_i est non nulle et le \mathbf{R} -espace vectoriel généré par les r_i est \mathbf{C} .

Pour $k \geq 3$ ces deux conditions peuvent être facilement satisfaites simultanément. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument décroissant.

Nous formons un polygone en concaténant les résidus dans cet ordre, puis en reliant le sommet final au sommet initial par deux segments satisfaisant les deux propriétés suivantes. Ils sont d'égale longueur et l'angle à leur intersection est égal à $(a_1 + k)\frac{2\pi}{k}$. Remarquons que ce polygone est sans point d'auto-intersection. La différentielle est obtenue en collant des demi-cylindres aux arêtes r_i et les deux arêtes spéciales entre elles par rotation.

Nous traitons maintenant le cas plus subtil où $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Le cas d'un unique pôle est trivial, donc nous considérerons le cas de deux pôles d'ordre $-k$. Le lemme 4.13 implique sans difficultés que tous les résidus qui ne sont pas proportionnels à $(1, (-1)^k)$ sont dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k, -k)$. Supposons maintenant que les résidus soient $(1, (-1)^k)$ et que $(a_1, a_2) \neq (1, -1)$. Nous concaténons le segment $\exp(\frac{2i\pi}{k})$ avec le segment -1 . Remarquons que l'angle au point d'intersection est $\frac{2\pi}{k}$. Relions le point de départ au point d'arrivé par deux segments d'égale longueur qui forment un angle $\frac{2(a_2+k)\pi}{k}$ à leur intersection. Le polygone ainsi formé est non dégénéré et les identifications décrites au paragraphe précédent donnent la différentielle souhaitée.

Enfin, les k -résidus $(1, (-1)^k)$ n'appartiennent pas à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$. Sinon la k -différentielle entrelacée obtenue en collant les deux pôles d'ordre $-k$ serait lissable. La k -différentielle obtenue par lissage serait dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$, qui est vide.

Nous considérons maintenant les cas avec $s \geq 3$ pôles d'ordre $-k$. Nous montrons par récurrence sur s que les hypothèses du lemme 4.13 sont presque toujours vérifiées. Les quelques cas restant seront traités à la main.

Considérons tout d'abord le cas où tous les k -résidus R_i sont de norme 1. Afin d'utiliser le lemme 4.13 il suffit de montrer qu'il existe $s - 1$ racines r_i des R_i telles que la somme appartient au disque ouvert épointé Δ^* . Nous supposons dans un premier temps que si $k = 4, 6$, alors les R_i ne sont pas tous égaux entre eux et que si $k = 3$, alors ils ne sont pas proportionnels à $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. S'il y a $s = 3$ pôles, il suffit de prendre deux racines dont les arguments sont distincts mais de différence inférieure à $\frac{2\pi}{k}$. Cela est clairement toujours possible sous nos hypothèses. De plus notons que ces deux racines ne sont pas proportionnelles. Maintenant par récurrence on suppose que la somme de $s - 1$ racines est $t_{s-1} \in \Delta_*$ et qu'au moins deux racines ne sont pas proportionnelles. Alors nous prenons la racine r_s de R_s qui atteint le minimum du produit scalaire $\langle t_{s-1}, r \rangle$ où r est une racine de R_s . Il est alors aisément vérifiable que $t_{s-1} + r_s \in \Delta^*$. On peut donc conclure par le lemme 4.13.

Considérons les cas des résidus de la forme (1^s) pour $k = 4, 6$ et $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ pour $k = 3$. Nous construisons une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0((s-2)k+1, -1; (-k^s))$ dont les k -résidus sont comme ci-dessus, sauf dans les cas sporadiques (2) à (5) du théorème 1.14. Notons que ces strates sont les seules avec $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ qui ne soient pas vides.

Commençons par $k = 3$. Si $R = (1^s)$, nous construisons une ligne brisée en concaténant $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ segments $e^{i\pi/3}$ puis $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ fois -1 . Nous joignons alors le point initial avec le point final par deux segments d'égale longueur avec un angle de $\frac{2\pi}{3}$ à leur intersection. Pour $s > 3$, cela nous donne un polygone non dégénéré. On conclut en faisant la construction (C1).

Si les 3-résidus sont $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ on procède de la façon suivante. On part du polygone du paragraphe précédent avec $s_1 + \lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ segments. Remarquons qu'un triangle équilatéral permet de remplacer un 3-résidu égal à 1 par deux 3-résidus égaux à -1 . Cela implique le résultat pour s_2 pair. Si s_2 est impair, on ajoute un segment $\exp(-2i\pi/3)$ au sommet final de la concaténation.

Considérons maintenant le cas $k = 4$. Nous construisons un polygone de la façon suivante. Si le nombre de pôles s est impaire, nous concaténons $\lfloor s/2 \rfloor$ fois $-i$, puis le segment 1 et ensuite $\lfloor s/2 \rfloor$ fois i . La différence entre le point initial et final est donc le segment 1. Nous pouvons joindre ces deux points par deux segments d'égale longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{4}$. Si s est paire, alors nous concaténons $s/2 - 1$ fois $-i$, puis deux fois 1 et enfin $k/2 - 1$ fois i . La différence entre le point initial et final est donc le segment 2. Nous pouvons joindre ces deux points par deux segments d'égale longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{4}$. Ce polygone ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 6$. Et la construction (C1) donne la différentielle désirée.

Enfin il reste à traiter le cas $k = 6$. Si s est pair, nous formons la ligne brisée en concaténant $\frac{s}{2} - 1$ fois -1 , puis $e^{2i\pi/3}$, puis $e^{i\pi/6}$ et finalement $\frac{s}{2} - 1$ fois 1. Si s est impaire, nous concaténons le segment $e^{-i\pi/6}$ à la fin de la ligne brisée. Nous joignons le point initial au point final par deux segments d'égale longueur et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Ce polygone ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 5$ et alors on conclut par la construction (C1).

Nous considérons maintenant les cas où les k -résidus n'ont pas tous la même norme. Commençons par le cas $s = 3$. Soit R_1 un k -résidu de plus grande norme. Si $k \neq 3, 4$, alors comme précédemment il existe des racines de R_2 et R_3 dont la somme est de norme strictement inférieure à $|R_1|$. Le lemme 4.13 permet alors de conclure.

Commençons par les cas où $k = 4$. Si $R_2 \neq R_3$, alors la construction ne pose aucun problème. Mais si $R_2 = R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$, alors nous devons considérer deux cas. Si $|R_1| > 4$, alors il existe deux racines quatrièmes non proportionnelles des 4-résidus R_2 et R_3 telles que la somme est inférieure à $\sqrt{2}$ et on peut utiliser le lemme 4.13. En revanche si $|R_1| \leq 4$ ce n'est jamais le cas. Si les 4-résidus ne sont pas égaux à $(1, 1, -4)$ alors nous permutons les résidus de telle sorte que $R'_1 := 1$, $R'_2 := 1$ et $R'_3 := -4$. Dans ce cas, il existe une somme de racines quatrièmes de -4 et 1 se trouve dans Δ^* et le lemme 4.13 permet de conclure. Notons que cette construction ne fonctionne pas dans le cas $(-4, 1, 1)$ car les racines quatrièmes de -4 sont $\sqrt{2}\zeta_4(1+i)$ avec ζ_4 une racine quatrième de l'unité.

Une analyse similaire fonctionne pour $k = 3$. Si $R_2 \neq -R_3$, alors la construction ne pose aucun problème. Mais si $R_2 = -R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$, alors nous devons considérer deux cas. Si $|R_1| > 3\sqrt{3}$, alors il existe deux racines troisièmes des 3-résidus R_2 et R_3 telles que la somme est inférieure à la racine cubique de $|R_1|$ et on peut utiliser le lemme 4.13. En revanche si $|R_1| \leq 3\sqrt{3}$ ce n'est jamais le cas. Si les 3-résidus ne sont pas égaux à $(1, -1, 3i\sqrt{3})$, alors nous permutons les résidus de telle sorte que $R'_1 := 1$, $R'_2 := -1$ et $R'_3 := R_1$. Dans ce cas, il existe des racines troisièmes de $3i\sqrt{3}$ et de -1 dont la somme est dans Δ^* . Notons que cette construction ne fonctionne pas dans le cas $(3i\sqrt{3}, 1, -1)$ car les racines troisièmes de $3i\sqrt{3}$ sont $\zeta_3(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ avec ζ_3 une racine troisième de l'unité.

Considérons maintenant par récurrence le cas où $s \geq 4$. Comme précédemment nous considérerons tout d'abord les cas $k \neq 3, 4$. Soient (R_1, \dots, R_{s+1}) des résidus où l'on suppose que la norme de R_1 est maximale et celle de R_{s+1} minimale. Par récurrence, il existe des racines k ième (non toutes proportionnelles) aux (R_2, \dots, R_s) telles que leur somme t_s est non nulle et de longueur strictement inférieure à $|R_1|^{\frac{1}{k}}$. Nous sommes maintenant ramenés au cas de trois k -résidus (R_1, t_s^k, R_{s+1}) . Ainsi la construction précédente nous donne des racines qui satisfont aux hypothèses du lemme 4.13. Cela implique la surjectivité de l'application résiduelle de ces strates de k -différentielles.

Les cas $k = 3$ et $k = 4$ sont similaires entre eux. Nous donnerons les détails que dans le cas $k = 4$. Pour tous les 4-résidus qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -4)$ la construction du paragraphe précédent se généralise sans problèmes. Supposons donc que $R = (1, \dots, 1, -4)$. S'il y a un nombre impaire de 1, alors il existe une somme de racines (non toutes proportionnelles) de longueur 1 qui vérifient les hypothèses du lemme 4.13. Si le nombre de 1 est pair, on prend 2 racines égales à 1, la moitié des restantes égales à i et l'autre moitié égales à $-i$. On concatène les $-i$ puis les deux 1, puis les i et enfin

$\sqrt{2} \exp(\frac{3i\pi}{4})$. En reliant le point initial au point final par deux segments faisant un angle de $3\pi/2$, on obtient un polygone qui permet d'utiliser la construction (C1).

Pour conclure, il reste à montrer que les uplets ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle dans les cas sporadiques. Comme tous les cas sont similaires, nous ne prouverons que le cas du uplet $(1, 1, 1, 1)$ pour la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 9; (-4^4))$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une 4-différentielle ξ ayant ces invariants locaux. Elle aurait 4 demi-cylindres infinis dont les largeurs seraient dans l'ensemble $\{\pm 1, \pm i\}$. Il y a deux cas à considérer selon que le zéro d'ordre -1 borde un domaine polaire ou non.

Supposons que le zéro d'ordre -1 est au bord d'un domaine polaire. Il existe alors un lien selle entre ce zéro et celui d'ordre 9 tel qui ne coupe pas l'angle au zéro d'ordre -1 en deux parties. Soit il existe un segment, formé d'un ou plusieurs liens selles, entre ces deux sommets soit il n'y en a pas. S'il y a zéro ou une connexion de selle, alors la somme des trois autres racines des 4-résidus restant est égale à la différence entre ces deux sommets. Mais, cela est impossible puisque les points $\pm 1, \pm i$ engendrent un réseaux de \mathbf{C} et que cette différence est strictement comprise entre 0 et 1. S'il y a plusieurs liens selles entre ces deux sommets. On peut facilement vérifier que il ne peut y en avoir que 2, qui bordent deux domaines polaires distincts. Le reste des ces deux bords doit être constitué d'un lien selle qui borde l'autre domaine polaire. Mais dans ce cas, on vérifie que la surface formé à trois zéros.

Supposons maintenant que le zéro d'ordre -1 ne borde pas de domaine polaire. On peut alors couper la surface le long du lien selle de longueur minimale entre les deux zéros. La surface obtenue est une surface de translation à bord ayant un angle de $\frac{3\pi}{2}$. Le complément des parties polaires est alors un hexagone. Toutefois, il n'est pas possible de prendre un chemin de quatre segments dans le réseaux engendré par $\pm 1, \pm i$ satisfaisant les deux conditions suivantes. Le début et la fin sont différents et les points intermédiaires sont strictement au dessus du coin d'angle $\frac{3\pi}{2}$ reliant ces deux points. Cela montre que $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 9; (-4^4))$ ne contient aucune pluridifférentielle ayant pour 4-résidu $(1, 1, 1, 1)$.
C.Q.F.D.

Nous prouvons maintenant le théorème 1.14 dans les cas où les deux zéros sont positifs. Ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans des cas listés de (6) à (11). La preuve repose sur le lemme 4.14. Dans cette preuve, nous utilisons les notations de ce lemme, en particulier $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1 < \bar{a}_2 < 0$.

Preuve du théorème 1.14, les deux zéros sont positifs. On considère une strate de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ et un s -uplet $R := (R_1, \dots, R_s)$ dans $(\mathbf{C}^*)^s$. Nous construisons une k -différentielle dans cette strate avec ces k -résidus, à l'exception de quelques cas sporadiques.

Nous débutons par les cas où $k \geq 5$. Considérons les $l_2 + 1 \geq 2$ k -résidus de longueurs maximal, que l'on supposera être $(R_{l_1+1}, \dots, R_{l_s})$. Nous normalisons les k -résidus de telle sorte que le minimum de $\{|R_i| : i = l_1 + 1, \dots, l_s\}$ est 1. On peut choisir les racines r_i des R_i , telles que la somme des $l_2 + 1$ derniers r_i soit de longueur supérieure à $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})|$ et celle des l_1 premiers inférieure à 1. Comme $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})| > \sqrt{2}$, le lemme 4.14 implique l'existence d'une k -différentielle avec les invariants souhaités.

Nous considérons maintenant le cas $k = 4$. Nous traitons d'abord le cas des strates $\Omega^4 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-4^s))$ où $a_2 = kl_2 - 1$ avec $l_2 \geq 2$. Supposons que les $l_2 + 1$ derniers résidus sont les plus grand en norme. Nous normaliserons les k -résidus de telle sorte que le minimum de $\{|R_i| : i = l_1 + 1, \dots, l_s\}$ est 1. On peut choisir des racines des k -résidus R_i telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières est strictement supérieure à 2 et celle des l_1 premières est inférieure à $\sqrt{2}$. Le lemme 4.14 permet alors de conclure.

On considère maintenant les strates de la forme $\Omega^4 \mathcal{M}_0(4(s-3)+1, 3; (-4^s))$. Supposons tout d'abord que les 4-résidus ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1)$. On supposera que les deux derniers 4-résidus sont les plus grand en norme et que le minimum de $\{|R_i| : i = s - 1, s\}$

est 1. Si $|R_1|^{1/4} \geq \sqrt{2}$, alors il existe des racines r_{s-1} et r_s dont la somme est strictement supérieur à 2. On peut choisir les autres racines telles que leur somme est inférieure à $\sqrt{2}$. On peut donc appliquer le lemme 4.14. Si $|R_s|^{1/4} < \sqrt{2}$, il y a deux cas à traiter. Soit il existe une somme des autres racines strictement inférieure à 1. Ce cas ne pose pas de problème. Soit toutes les sommes sont supérieures à 1. Dans ce cas, on peut permuter R_s avec R_1 et choisir des racines telles que la somme des premières est inférieure à 1 et celle des deux dernières est supérieure à $\sqrt{2}$. Cela se montre de manière similaire aux strates quartiques dont un zéro est d'ordre négatif.

Dans ce cas, il reste à considérer le cas des 4-résidus égaux à $(1, \dots, 1)$. Dans le cas des strates où l_1 est impaire, on procède de la sorte. Pour s_2 on prend deux racines égales à 1. Pour s_1 , on prend $\lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor$ racines égales à i , le même nombre égales à $-i$ et la dernière égale à 1. On forme alors s_1 en concaténant tout d'abord les i puis 1 puis les $-i$. La longueur de s_1 est 1 et on peut donc utiliser le lemme 4.14 pour conclure. Nous traitons maintenant le cas où l_1 est pair. Remarquons que la méthode que nous venons d'utiliser ne s'applique jamais, car s_1 est de longueur supérieur à $\sqrt{2}$ (si non nulle). Pour $l_1 \geq 6$ on peut procéder de la sorte. On a $l_2 = 1$ et on choisit la racine 1 pour le dernier 4-résidu. Maintenant les $l_1 + 1 = s - 1$ autres résidus sont $i, i, 1, 1, 1, -i, -i$ et les résidus restant sont répartis pour moitié en 1 et pour moitié en -1 . On constate que la somme de ces racines est égale à trois. Ainsi en partant de 0, on concatène les -1 puis les i puis les 1 et enfin les $-i$. Le polygone est obtenu à partir de la ligne brisée en reliant 3 à $2 + i$ puis en concaténant la racine 1 entre $2 + i$ et $1 + i$ et enfin en reliant $1 + i$ à 0. On peut alors procéder à la construction (C2). Enfin il reste les deux strates avec $l_1 = 2$ et $l_1 = 4$. On peut montrer de manière similaire aux cas où l'un des zéros est négatif que l'application résiduelle ne contient pas $(1, \dots, 1)$.

Enfin nous supposons $k = 3$. Tout d'abord on montre avec des considérations similaires au cas $k = 4$ que les s -uplets qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ appartiennent à l'image des applications résiduelles. Ainsi, on considérera les s -uplets de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$.

Si $l_2 \geq 3$, alors on peut choisir des racines telles que la longueur de la somme des $l_2 + 1$ dernières est supérieure $\frac{7}{2}$ et celle des l_1 autres est 1 ou $\sqrt{3}$. Le lemme 4.14 permet alors de conclure.

Si $l_2 = 2$, alors le lemme 4.14 s'applique si $s_1 \neq \sqrt{3}$. En particulier, on a $l_1 \geq 2$. Si tous les 3-résidus ne sont pas égaux entre eux, échange un 3-résidu de s_1 par un autre résidu. Cela permet d'obtenir la somme s_1 égale à 1. Ainsi, il reste à considérer le cas où tous les 3-résidus sont égaux à 1. Si l_1 n'est pas divisible par 3, alors s_2 est simplement $1 + 1 + 1$. Pour les l_1 racines restantes, on procède de la sorte. Si $l_1 = 3l'_1 - t$ avec $t \in \{1, 2\}$, alors on prends l'_1 fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$, l'_1 fois $\exp(\frac{i\pi}{3})$ et enfin $l'_1 - t$ fois -1 . Alors s_1 est soit de longueur 1 et on peut conclure par le lemme 4.14 soit de longueur 2. Dans ce second cas, comme $s_2 = 2$, on peut relier les nombres complexes 2 et 3 par deux segments d'égale longueur tels que l'angle vu du segment de longueur 3 est $\frac{2\pi}{3}$. La construction (C1) à partir de ce polygone permet d'obtenir la 3-différentielle souhaitée. Enfin, il reste les cas où l_1 est divisible par 3. Dans ce cas on utilise la construction (C2). On suppose que $l_1 > 3$. Si l_1 est impair, on prend $1 + 1$ pour s'_2 . Si l_1 est pair, on prend $\exp(\frac{2i\pi}{3}) + 1$ pour s'_2 . Dans les deux cas pour s'_1 on concatène $\lfloor \frac{l_1+1}{2} \rfloor$ fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$ puis $\exp(\frac{i\pi}{3})$. Il n'est pas difficile de vérifier que la construction (C2) est réalisable. Et enfin si $l_1 = 3$, alors on peut montrer qu'il n'est pas possible de construire une 3-différentielle avec ces singularités comme dans la preuve précédente. Donc l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(3, 5; (-4^4))$ ne contient pas $(1, 1, 1, 1)$.

Il reste maintenant à considérer le dernier cas où $l_2 = 1$. Nous allons montrer que si $l_1 = 5$, alors tous les 3-résidus de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$ avec $s = t_1 + t_2 = l_1 + l_2 + 1$ sont dans l'image de l'application résiduelle de ces strates. On peut remplacer un 3-résidu égal

à 1 (resp. -1) par deux 3-résidus égaux à -1 (resp. 1) via un triangle équilatéral. On en déduit que tous les 3-résidus de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$ sont dans l'image de l'application résiduelle dès que $l_2 \geq 5$.

Nous considérons les cas $l_1 \leq 5$. Pour $l_1 = 1$, i.e. dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$, nous prenons s_2 égal à $1 + 1$. Si le dernier 3-résidu -1 alors on fait la construction suivante. On prend la racine -1 et on relie les points initial et final de s_1 et s_2 entre eux par des segments de même longueur avec un angle égal à $\frac{2\pi}{3}$. La construction (C1) permet de conclure. En revanche, il n'existe pas de 3-différentielle dans cette strate dont les 3-résidus sont égaux à 1.

Maintenant supposons que $l_1 = 2$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(4, 2; (-3^4))$. Si les 3-résidus sont (1^4) , alors on part de la 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$ dont les 3-résidus sont $(1, 1, -1)$. On remplace alors le résidu -1 par deux résidus 1 par la construction provenant du triangle équilatéral. En revanche, on peut montrer que $\mathfrak{R}^3(4, 2; (-3^4))$ ne contient pas $(1, 1, -1, -1)$. Il reste le cas où les 3-résidus sont $((1^3), -1)$. Dans ce cas, on concatène 1 avec $\exp(i\pi/3)$ et on relie les points de départ et d'arrivée à 0 et 2 respectivement. Le 3-différentielle est alors obtenue par la construction (C1).

Les cas avec $l_1 = 3$ et $l_1 = 4$, i.e. des strates $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, 2; (-3^5))$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(10, 2; (-3^6))$, se traitent en remplaçant un 3-résidu par deux 3-résidus opposés par la construction en triangle équilatéral. Toutefois, on peut vérifier qu'il n'est pas possible d'obtenir les 3-résidus restant. Ainsi les 3-résidus $(1, 1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$ et $(1, 1, 1, -1, 1, 1)$ ne sont pas dans l'image.

Enfin considérons le cas $l_1 = 5$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(13, 2; (-3^7))$. On peut obtenir la majorité des 3-résidus via le remplacement d'un 3-résidu par deux 3-résidus opposés. Ainsi, il suffit de montrer que si les 3-résidus sont de la forme $(1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$, alors il existe une 3-différentielle dans cette strate avec ces 3-résidus. Cela peut se faire grâce à la construction (C2). On prend s_1 égale à 1. Pour les six autres racines on procède de la sorte. On concatène $\exp(-i\pi/3)$ deux fois puis deux fois 1 et enfin deux fois $\exp(i\pi/3)$. Le reste est la construction (C2). C.Q.F.D.

Pour terminer, nous montrons qu'il n'existe pas d'obstruction pour les strates de genre zéro, n'ayant que des pôles d'ordre k et au moins trois zéros.

Proposition 4.18. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur le nombre de zéros. On commence par vérifier que partant d'une strate avec 3 zéros, on peut toujours additionner l'ordre de deux zéros et obtenir une strate dont l'application résiduelle est surjective. Remarquons que cette strate peut ne pas être primitive. Toutefois, cette dernière n'est pas constituée par des k -différentielles qui sont la puissance k ième de différentielles abélienne. Donc on obtient la surjectivité pour trois zéros. Le reste de la preuve se fait par éclatement. C.Q.F.D.

5. PLURIDIFFÉRENTIELLES EN GENRE SUPÉRIEUR.

Dans cette section nous montrons que l'application résiduelle des strates de genre $g \geq 1$ sont surjectives à l'exception de quatre familles exceptionnelles. Plus précisément nous prouvons les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 pour les strates k -différentielles avec $k \geq 2$. Nous considérons dans la section 5.1 les strates ayant au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Dans la section 5.2 nous traitons les cas où tous les pôles sont d'ordre $-k$. Enfin nous traitons le cas des strates sans pôles dans la section 5.3.

5.1. Pluridifférentielles avec un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Dans ce paragraphe, nous considérons les strates avec au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Nous montrons tout d'abord que l'application résiduelle est surjective pour les strates de genre 1 distinctes de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4a; (-4^a))$ avec un unique zéro. Dans ce cas, l'application

résiduelle contient $\mathbf{C}^a \setminus \{0\}$ (lemmes 5.1 et 5.2). Puis nous montrons la surjectivité des applications résiduelles de certaines strates quadratiques (lemme 5.3). Nous en déduisons la surjectivité dans le cas général par éclatement de zéro et couture d'anse. Enfin nous montrons que $0 \in \mathbf{C}^a$ n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4a; (-4^a))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a-1, 2a+1; (-4^a))$ (lemmes 5.5 et 5.6).

Lemme 5.1. *Soit (k, m) avec $m > k$ distinct de $(2, 4)$. L'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(m; -m)$ est surjective. De plus, l'image de $\mathfrak{R}^2(4; -4)$ contient \mathbf{C}^* .*

Démonstration. Si $k \nmid m$, alors le fait que $\Omega^k \mathcal{M}_1(m; -m)$ soit non vide est une conséquence élémentaire du théorème d'Abel. À partir de maintenant, nous supposons que $k \mid m$.

Une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(\ell k, -\ell k)$ avec un résidu non nul est donnée par le recollement de la partie polaire non triviale de type $k\ell$ associée aux vecteurs $(\emptyset; v_1, \dots, v_4)$ représentés sur la figure 21.

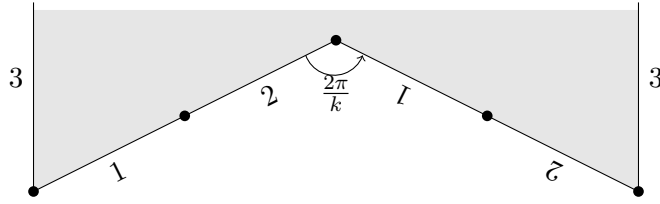


FIGURE 21. Une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ (en blanc) et $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; -k)$ (en gris).

Nous traitons maintenant le cas du k -résidu nul. Si $k \geq 3$, alors le dessin de gauche de la figure 22 représente une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ avec un résidu nul. Plus généralement, k -différentielles de $\Omega^k \mathcal{M}_1(\ell k, -\ell k)$ avec résidu nul sont données par le recollement d'une partie polaire triviale de type $k\ell$ associée à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ où les v_i sont représentés sur la figure 22 de gauche.

Pour les strates quadratiques de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2\ell; -2\ell)$ avec $\ell \geq 3$ nous procédons de la sorte. Une 2-différentielle avec ces invariants locaux est obtenue à partir de $\ell - 1$ domaines basiques positifs D_i^+ et $\ell - 1$ négatifs D_j^- . Les domaines D_1^\pm et D_2^\pm sont donnés par les domaine basique positif (resp. négatif) associés au vecteur (1). Les $\ell - 2$ autres domaines D_i^\pm sont les domaines polaires associés à (\emptyset) . On colle les demi-droites \mathbf{R}^- des domaines de même indices entre elles. La demi-droite \mathbf{R}_+ de D_i^+ à D_{i+1}^- modulo ℓ . Les vecteurs 1 au bord des domaines positifs (resp. négatifs) D_1^+ et D_2^+ sont collés entre eux par rotation. Cette construction est représentée sur la figure 22 de droite. C.Q.F.D.

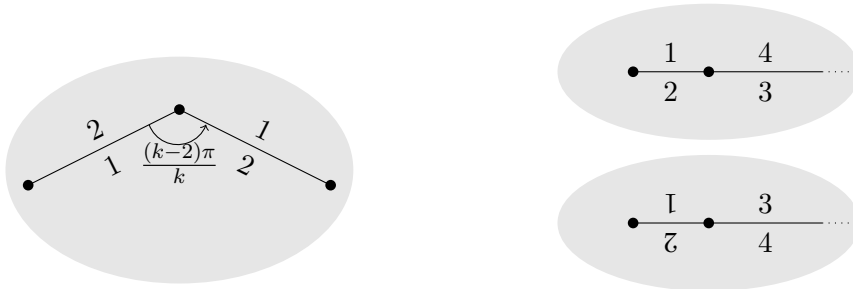


FIGURE 22. Une k -différentielle sans k -résidu dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ à gauche et dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(6; -6)$ à droite.

Lemme 5.2. *Soient $k \geq 2$ et $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une partition de 0 telle que $(p, r) \neq (0, 0)$. Si $\mu \neq (4p; (-4)^p)$ ou $k \neq 2$, alors l'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(\mu)$ est surjective. De plus, l'image de $\mathfrak{R}^2(4p, (-4)^p)$ contient $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Nous commençons par le cas où $r \geq 2$. L'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ est surjective (c.f. le lemme 4.2). On obtient donc la surjectivité de $\mathfrak{R}^k(\mu)$ par couture d'anse.

Supposons maintenant qu'il existe un unique pôle d'ordre non divisible par k . Le lemme 4.2 dans le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c; (-k^s))$ implique que $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$ est contenu dans l'image de $\mathfrak{R}^k(\mu)$ par couture d'anse. Il suffit donc de prouver que l'origine est dans l'image de l'application résiduelle. En particulier, ces strates ne possèdent pas de pôles d'ordre $-k$. Nous associons aux pôles d'ordre $k\ell_i$ les parties polaires triviales d'ordres $k\ell_i$ associées à $(1; 1)$. Pour le pôle d'ordre $-c$, nous prenons une k -différentielle de $\Omega^k\mathcal{M}_1(c; -c)$ avec un lien selle d'holonomie 1. Nous obtenons une surface plate à bord en la coupant le long de ce lien selle. La pluridifférentielle désirée est obtenue en collant les bords des fentes de manière cyclique.

Il nous reste à traiter le cas où tous les pôles sont d'ordres divisibles par k . Nous commençons par construire une k -différentielle dans $\Omega^k\mathcal{M}_1(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ dont tous les k -résidus s'annulent. Partons de la k -différentielle de $\Omega^k\mathcal{M}_1(k\ell_1; -k\ell_1)$ sans résidu donnée par le lemme 5.1 (on suppose que $\ell_1 \geq 3$ si $k = 2$). On peut alors couper cette surface le long d'un lien selle dont l'holonomie sera notée v . Dans les deux dessins de la figure 22, cela revient à couper le long du lien selle dénoté par 1. Pour tous les autres pôles on prend une partie polaire triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(v; v)$. La surface obtenue en recollant les segments de manière cyclique (voir la figure 5.1) a les propriétés désirées.

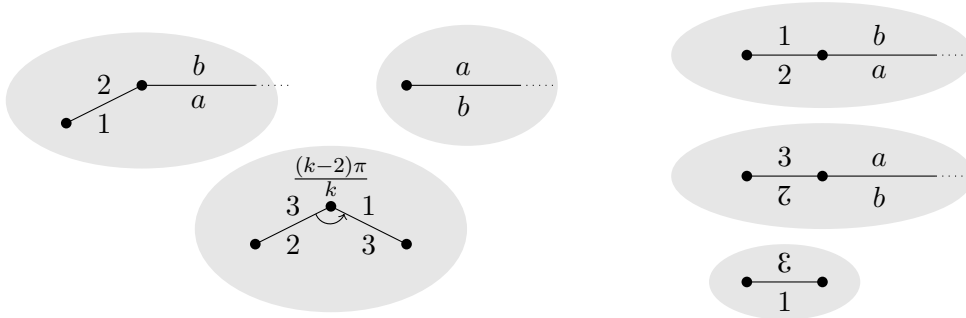


FIGURE 23. k -différentielle de $\Omega^k\mathcal{M}_1(5k; -2k, -3k)$ avec un résidu nul pour $k \geq 3$ à gauche et $k = 2$ à droite

Nous traitons maintenant les différentielles des strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ dont au moins un résidu est non nul. Nous supposons que s'il existe un unique pôle avec un résidu non nul alors le pôle P_1 d'ordre b_1 possède un résidu nul. Considérons les pôles P_i avec $2 \leq i \leq p'$ qui possèdent un k -résidu R_i non nul. Nous associons à P_i la partie polaire non triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(r_i; \emptyset)$. Considérons maintenant les pôles P_j ayant un résidu nul. Nous associons la partie polaire triviale d'ordre $k\ell_j$ associée à $(r_{i_j}; r_{i_j})$ pour un k -résidu R_{i_j} avec $2 \leq i_j$ non nul. Puis nous collons le segment r_i du domaine positif de P_i au segment r_{i_j} du domaine basique négatif de P_j .

Enfin, pour le pôle P_1 nous faisons la construction suivante. Tout d'abord, quitte à choisir d'autres racines r_i des R_i , nous pouvons supposer que les r_i ont une partie réelle positive et que la somme des r_i est non nulle. Nous supposons aussi que les r_i sont ordonnés par argument croissant. Nous prenons pour P_1 la partie polaire de type $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_1, v_2, v_2; r_2, \dots, r_{p'})$ où les v_i sont donnés comme suit. Les v_i sont de même longueur, vérifient l'égalité $r_1 = 2v_1 + 2v_2 - \sum_{i \geq 2} r_i$ et l'angle (au dessus) du point d'incidence de v_1 et v_2 est $\frac{2(k-1)\pi}{k}$.

La k -différentielle est obtenue en identifiant par translation les bords r_i des domaines polaires positifs aux segments r_i de la partie polaire négative de P_1 . Enfin, nous identifions par rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et translation, le premier v_1 au premier v_2 et le second v_1 au

second v_2 . Cela donne une pluridifférentielle primitive avec les invariants souhaités. Un exemple est représenté dans la figure 24.

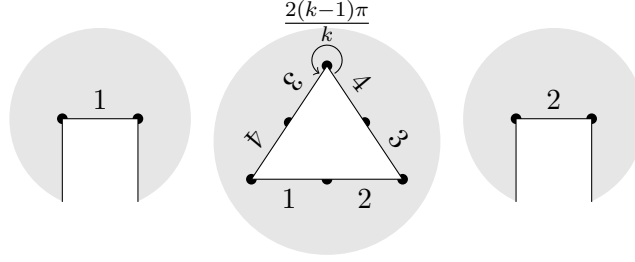


FIGURE 24. Une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(6k; (-2k^3))$ dont les k -résidus sont $(0, 1, 1)$.

C.Q.F.D.

Lemme 5.3. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2p + 1, 2p - 1)$ et des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4(p + 1); (-4^p))$ contient l'origine.*

Démonstration. Pour commencer la figure 25 exhibe une différentielle quadratique primitive ayant un résidu nul dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ (en gris).

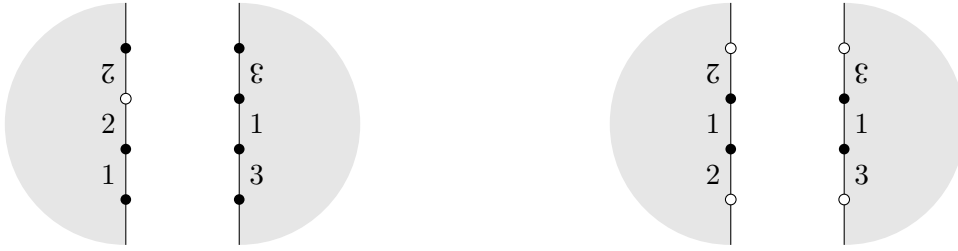


FIGURE 25. En gris deux différentielles quadratiques dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ avec résidus nuls. En blanc deux différentielles quadratiques dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; (-2^2))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; (-2^2))$ avec résidus quadratiques $(1, 1)$.

Nous prouvons maintenant le résultat pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2p + 1, 2p - 1)$ par récurrence sur le nombre p de pôles. Supposons qu'il existe une différentielle avec résidus nuls dans toutes les strates de cette forme avec $p - 1$ pôles. De plus, nous supposons que si $a_2 = -1$, alors il existe un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre a_1 à lui-même. Dans les cas où $a_i \neq -1$, nous supposons qu'il existe un lien selle entre les deux singularités. Ces propriétés sont satisfaites par les exemples dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ représentés dans la figure 25.

Si $(a_1, a_2) = (4p + 1, -1)$, alors il existe une différentielle dans la strate quadratique $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4p - 3, -1; (-4^{p-1}))$ sans résidus avec un lien selle entre la singularité d'ordre $4p - 3$. Coupons la surface le long de ce lien selle. Prenons une partie polaire d'ordre 4 associée à $(v; v)$ où v est l'holonomie de ce lien selle. La surface formée par le collage des bords de ces surfaces par translation est dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4p + 1, -1; (-4)^p)$, n'a pas de résidus aux pôles et possède un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre $4p + 1$ à lui-même.

Si $(a_1, a_2) \neq (4p + 1, -1)$, alors il existe une différentielle dans la strate quadratique $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1 - 2, a_2 - 2; (-4)^{p-1})$ sans résidus qui possède un lien selle entre les deux zéros. La construction du paragraphe précédent donne une différentielle ayant les invariants souhaités et encore un lien selle entre les deux zéros.

Une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1);(-4^p))$ sans résidus aux pôles est donnée de la façon suivante. Le lemme 5.2 fournit une différentielle primitive de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4(p+1);(-4^p);-2,-2)$ telle que les résidus aux pôles d'ordre 4 sont nuls et les résidus quadratiques aux pôles doubles sont égaux entre eux. Nous formons une différentielle quadratique entrelacée en collant les deux pôles d'ordre -2 ensemble. Cette différentielle entrelacée peut être lissée (voir proposition 2.3) et la différentielle quadratique obtenue par lissage possède les invariants souhaités. C.Q.F.D.

Lemme 5.4. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(\mu)$ avec $g \geq 1$, $\mu \neq (4p;(-4^p))$ et $\mu \neq (2p-1, 2p+1;(-4^p))$ est surjective.*

Démonstration. Si μ possède un unique zéro, alors on obtient la surjectivité de l'application résiduelle, à l'exception des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_g(a;(-4^p))$, en combinant les lemmes 5.1 et 5.2 et la couture d'anses. Les différentielles des strates $\Omega^2\mathcal{M}_g(a;(-4^p))$ sont obtenues par couture d'anse à partir des strates $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1);(-4^p))$. Donc le lemme 5.3 implique la surjectivité de l'application résiduelle dans ces cas.

Considérons les strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -c_i; -b_j; (-k^s))$ avec $n \geq 2$ zéros. On obtient la surjectivité de l'application résiduelle en éclatent l'unique zéro des différentielles de la strate $\Omega^k\mathcal{M}_g(\sum a_i; -c_i; -b_j; (-k^s))$, sauf pour les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; (-4^p))$ avec $n \geq 2$. La surjectivité pour $n = 2$ a été montrée dans le lemme 5.3. Pour $n \geq 3$, il suffit d'éclater l'un des deux zéros de ces 2-différentielles pour obtenir la surjectivité. C.Q.F.D.

Lemme 5.5. *Il n'existe pas de différentielle quadratique primitive dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p;(-4^p))$ pour $p \geq 1$ dont tous les résidus quadratiques sont nuls.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -4)$. Si elle contenait une différentielle (primitive) sans résidu, alors on pourrait former une différentielle entrelacée lissable en collant au pôle une différentielle quadratique qui est le carré d'une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_1(\emptyset)$. Par le lemme 2.4, le lissage produirait une différentielle quadratique primitive dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(4)$, qui est vide par [MS93].

Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique (primitive) ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p;(-4^p))$ pour $p \geq 2$ dont tous les 2-résidus soient nuls. Dans la suite nous faisons référence aux notions de la section 2.4. On peut supposer que le cœur de cette surface est dégénéré et que toutes les connections de selle sont horizontales. Cette surface possède alors $p+1$ liens selles et chaque domaine polaire est bordé par au moins deux connections de selles (sinon son résidu serait non nul). On en déduit que le graphe domanial associé peut être de l'une des deux formes suivantes.

- (1) Il y a un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- (2) Il y a deux sommets de valence 3, et les autres sont de valence 2.

Nous pouvons simplifier ξ de la manière suivante. Prenons un domaine polaire bordé par 2 liens selles. Coupons ξ le long de ces liens selles, enlevons ce pôle et recollons les deux segments au bord que nous venons de créer. La différentielle que nous venons de créer est encore primitive, sans résidus et dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4(p-1);(-4)^{p-1})$.

Considérons une différentielle ξ dont le graphe domanial possède un pôle de valence 4. En répétant l'opération du paragraphe précédent jusqu'à avoir éliminé tous les pôles de valence 2, on obtient une différentielle quadratique primitive sans résidu dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -4)$. Cela montre que ξ ne peut pas avoir de graphe domanial avec un sommet de valence 4.

Supposons que le graphe domanial de ξ possède deux pôles de valence trois. En répétant l'opération du paragraphe précédent nous pouvons obtenir deux graphes. Dans le premier cas deux sommets sont reliés entre eux par trois arêtes. Dans le second cas les deux sommets sont reliés entre eux par une unique arête et ont chacun une boucle. Remarquons que dans les deux cas, le fait que le résidu quadratique est nul et les connections de selles sont horizontales implique que l'une des connections de selle est strictement plus longue

que les deux autres. Les deux connections les plus courtes se trouvent du même côté du segment formé par le bord d'un domaine polaire. Ces deux segments ne peuvent pas être identifiés ensemble. Sinon cette surface aurait un zéro d'ordre -1 . Cela exclut le graphe avec des boucles. Dans l'autre cas, la surface est obtenue par des translations uniquement (pas de rotations) et n'est donc pas primitive. C.Q.F.D.

Lemme 5.6. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4)^p)$ ne contient pas l'origine.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(3, 1; -4)$. S'il y avait une différentielle quadratique sans résidus dans cette strate, alors on pourrait former une différentielle entrelacée lissable en collant au pôle une différentielle quadratique qui est le carré d'une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_1(\emptyset)$. Par le lemme 2.4, le lissage donnerait une différentielle quadratique dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(3, 1)$, qui est vide par [MS93].

Nous supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4)^p)$ dont tous les résidus sont nuls. Nous supposons (voir section 2.4) que le cœur de ξ est dégénéré et que toutes les connections de selle sont horizontales. Dans ce cas, ξ possède $p+2$ connections de selle.

Rappelons que le graphe domanial et le graphe domanial simplifié de ξ ont été introduit dans la section 2.4. Les sommets du graphe domanial de valence supérieur à trois sont dits spéciaux. Remarquons qu'un domaine polaire ne peut pas être bordé par un unique lien selle, sinon le résidu de ce pôle serait non nul. Dit autrement, le graphe domanial n'a pas de sommet de valence 1. Les graphes domaniaux simplifiés peuvent être de l'une des formes suivantes. Le graphe possède un sommet de valence (6). Le graphe possède deux sommets de valences respectives (5, 3) ou (4, 4). Il possède trois sommets de valences respectives (4, 3, 3). Enfin le graphe simplifié peut contenir quatre sommets de valences (3, 3, 3, 3).

Le reste de la preuve se présente en deux étapes. Tout d'abord nous simplifions la surface ξ afin d'obtenir une *surface réduite*. Ensuite nous montrons que les surfaces réduites ne peuvent pas exister en considérant leurs graphes domaniaux possibles.

Une *surface réduite* est une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4)^p)$ dont tous les résidus sont nuls, le cœur est dégénéré et les deux extrémités du bord des domaines polaires de valence 2 et 3 correspondent au zéro d'ordre $2p-1$.

Nous décrivons maintenant la procédure qui associe à ξ une surface réduite. Prenons un domaine polaire de valence 2 bordé par deux connections de selle joignant le zéro d'ordre maximal ou les deux zéros. Coupons ξ le long de ces deux liens selles, supprimons ce pôle et collons les deux segments que nous avons créés. Cette opération fait diminuer l'ordre du zéro d'ordre maximal par 4 ou celui des deux zéros par 2 suivant le cas. Dans les deux cas, la différentielle est dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p-3; (-4)^{p-1})$. Remarquons que l'opération qui fait diminuer l'ordre du zéro maximal par 4 rend ce zéro d'ordre inférieur à l'autre.

Prenons un sommet de valence 3 et qui ne possède pas de boucle. De plus, on suppose que les extrémités de la fente du domaine polaire correspondent aux deux zéros ou au zéro d'ordre maximal. Nous coupons ξ le long de ces trois liens selles et supprimons cette partie polaire. La surface que nous obtenons a trois segments v_1, v_2 et v_3 au bord avec $v_1 = v_2 + v_3$. Nous collons v_2 et v_3 sur v_1 en préservant les extrémités de la fente (cela crée une singularité sur v_1). Cette opération diminue l'ordre des deux zéros de 2 ou le zéro d'ordre maximal par 4 (et ce zéro devient le zéro d'ordre minimal).

Nous faisons les opérations décrites dans les deux paragraphes précédent jusqu'à ce que aucune ne soit possible. La surface que nous obtenons est soit réduite, soit possède un unique pôle. Dans ce second cas, on obtiendrait une différentielle quadratique sans résidu dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(3, 1; -4)$. Ceci étant absurde, on supposera que la surface est réduite avec un nombre de pôles supérieur à deux.

Nous aurons besoin d'un résultat technique sur les liens selles contiguës dans les surfaces réduites. Dans un domaine polaire, les connections de selle sont ordonnées de manière cyclique autour du bord. Deux connections de selle adjacentes ne peuvent pas être les extrémités d'une boucle formée de pôles de valence 2 du graphe domaniaux. En effet, sinon supposons que les connections de selles adjacentes sont du même côté de la fente. Dans ce cas, le zéro correspondant à leur point d'intersection est différent du zéro correspondant aux autres extrémités de ces segments. Comme la surface est réduite, la boucle ne contient pas de sommets de valence deux. Ainsi le zéro au point d'intersection est d'ordre -1 . Mais aucune des strates que nous considérons n'a un zéro avec un tel ordre. Supposons maintenant les deux connections de selle se rencontrent à l'extrémité de la fente, chacune d'un côté. Le fait que la surface soit réduite implique que la boucle ne contient pas de sommets de valence 2. Cela implique que le bout de la fente est un point régulier. Cela conclut la preuve de ce résultat élémentaire sur les liens selles contiguës.

Nous traitons maintenant tous les cas possibles en fonction des valences des sommets spéciaux des graphes domaniaux des surfaces réduites. Remarquons que ceux-ci sont analogues aux graphes simplifiés avec la différence qu'il peut rester quelques sommets de valence deux. Mais ceux-ci ne contribuent qu'au zéro d'ordre minimal.

Nous commençons par le cas où tous les sommets spéciaux sont de valence 3. Par minimalité, le zéro correspondant au bout des fentes des domaines polaires est d'ordre minimal. Toutefois, ce zéro est clairement d'ordre supérieur à l'autre zéro, ce qui est absurde.

Dans le cas où un pôle est de valence 4 et deux autres sont de valence 3. Le zéro d'ordre minimal possède un angle minimal de 8π . En effet il doit correspondre aux bords des fentes des domaines de valence 3 et à au moins deux singularités du pôle de valence 4. D'un autre côté, l'angle du zéro maximal est d'angle au plus 7π . En effet, chaque pôle de valence trois contribue d'un angle π et celui de valence 4 au plus 4π . Cela donne une contradiction.

Nous traitons maintenant le cas des graphes domaniaux avec deux pôles spéciaux de valence 4. Le premier graphe possède une boucle à chaque pôle de valence 4 et deux arêtes les joignant. Le second graphe possède simplement quatre arêtes entre ces deux sommets. Remarquons qu'a priori, il peut y avoir des sommets de valence 2 sur ces arêtes.

Considérons le graphe avec deux boucles. Aux sommets spéciaux, soit il y a deux segments de part et d'autre de la fente, soit un côté contient 3 connections de selles et l'autre 1. De plus, le fait que les résidus quadratiques soient nuls impliquent que les deux sommets spéciaux sont simultanément de la même forme. S'il y a deux liens selles de part et d'autres du segment, alors les connections de selle correspondant aux boucles ne peuvent pas être du même côté. On en déduit facilement que la seule identification possible induit une surface orientable. Supposons maintenant qu'il y ait trois connections de selles d'un côté de chaque fente. Comme les liens selles des boucles ne peuvent pas être adjacents, les extrémités des fentes correspondent au même zéro. Ce pôle est donc d'ordre paire (quelque soit le nombre de pôles de valence deux sur les arêtes), ce qui est absurde.

Nous considérons enfin le graphe où les deux sommets spéciaux sont reliés par quatre arêtes contenant éventuellement des sommets de valence 2. Dans ce cas, le nombre de liens selles est identique de part et d'autre de la fente des sommets spéciaux. Si il y a 3 segments d'un côté et 1 de l'autre, alors la surface est non primitive. Ainsi nous considérons le cas avec deux liens selles de part et d'autre de la fente. Remarquons qu'il n'y a pas de sommets de valence 2 sur les arêtes. Sinon il existerait des connections de selle fermées entre le zéro d'ordre minimal. Cela implique que 6 des 12π des domaines spéciaux contribuent à ce zéro. Cela est clairement impossible. Donc on obtient une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, 3; (-4^2))$. Le zéro d'ordre maximal est d'angle 7π et le minimal de 5π . Ainsi il existe au moins une connexion de selle fermée reliant le zéro d'ordre minimal à lui

même. Comme les segments correspondant ne peuvent pas être contiguës, cela implique que l'angle à ce zéro est au moins 6π . On a obtenu la contradiction souhaitée.

Nous regardons maintenant les graphes avec un sommet de valence 5 et un de valence 3. Remarquons qu'il n'y a pas de boucle au sommet de valence 3. Sinon les liens selles formant les extrémités de cette boucle seraient adjacents. Donc le graphe est formé de trois arêtes reliant les deux sommets spéciaux et d'une boucle au sommet de valence 5 (et éventuellement d'autres sommets de valence 2). Dans le domaine de valence 5, il n'est pas possible qu'un unique segment se trouve d'une part de la fente. Sinon cette connexion de selle ne pourrait border ni la boucle ni l'une des trois arêtes connectant au pôle de valence 3. En effet, ce lien selle ne peut être homologue à aucun autre segment et à aucune somme de deux des quatre autres segments.

Donc il y a trois liens selles d'un côté et deux de l'autre. De plus, les liens selles bordant la boucle se trouve du même côté de la fente (pour des raisons de primitivité). Elle est donc formée en identifiant les deux segments extérieurs du côté de la fente qui contient trois segments. Mais il est alors aisé de vérifier que toutes les différentielles sans résidus que nous pouvons obtenir possèdent un unique zéro.

Pour terminer, nous considérons le cas d'un graphe domanial avec un unique pôle de valence 6. Le bord de ce domaine polaire est composé de six segments rangés en trois paires de longueurs identiques. Comme deux segments de la même paire ne peuvent pas être adjacents, il y a trois segments de part et d'autre de la fente. Si il y avait un segment de chaque paire de part et d'autre de la fente, alors la surface serait non primitive. Donc les liens selles doivent être de la forme $A_1B_1A_2$ d'un côté et $C_1B_2C_2$ de l'autre. Dans ce cas, il est facile de constater que les zéros sont d'ordres pairs. Cette dernière contradiction conclut cette preuve. C.Q.F.D.

5.2. Pluridifférentielles dont tous les pôles sont d'ordre $-k$. Dans ce paragraphe, nous considérons les strates de k différentielles de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$. Nous commençons par traiter le cas des strates de genre un avec un unique zéro. Nous montrons dans le lemme 5.7 que l'application résiduelle contient tous les k -résidus sauf éventuellement dans le cas quadratique si tous les résidus sont colinéaires. Puis nous montrons dans le lemme 5.8 que la seule exception en genre 1 peut être les résidus quadratiques proportionnels à $(1, \dots, 1)$ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ avec s pair. Puis nous montrons dans le lemme 5.9 que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ et s pair. Les strates générales sont traitées dans le lemme 5.10. Enfin nous prouvons dans les lemmes 5.11 et 5.12 que les résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s-1, s+1; (-2^s))$ avec s pair.

Lemme 5.7. *L'application résiduelle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(ks; (-k^s))$ est surjective pour $k \geq 3$. L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ est surjective pour $s = 1$ et contient les résidus (R_1, \dots, R_s) où les R_i ne sont pas tous sur un même rayon pour $s \geq 2$ (i.e. il existe R_i et R_j tels que $\frac{R_i}{R_j} \notin \mathbf{R}_+$).*

Démonstration. Pour tout $k \geq 2$, la figure 21 montre que les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; -k)$ sont non vides. Nous supposons donc que les strates ont $s \geq 2$ pôles d'ordre $-k$. Supposons qu'il existe des racines k ième r_i des R_i qui génèrent \mathbf{C} comme \mathbf{R} -espace vectoriel. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'argument de chaque r_i est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Nous concaténons alors les $-r_i$ par argument croissant. Ce segment brisé se trouve entièrement dans un demi-plan donné par la droite (DE) où D et E sont respectivement les points initial et final de la concaténation. Nous joignons D à E par quatre segments v_i^j avec $i, j \in \{1, 2\}$ de la façon suivante. Le segment brisé qu'ils forment se trouve de l'autre côté de la droite (DE) . L'angle entre v_1^1 et v_2^1 est $-2\pi/k$, entre v_2^1 et v_1^2 est π et enfin entre v_1^2 et v_2^2 est $2\pi/k$. Un exemple est donné par le dessin de gauche de la figure 26.

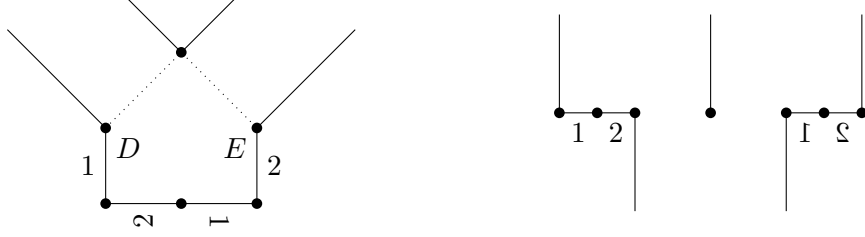


FIGURE 26. Une différentielle quartique de $\Omega^4 \mathcal{M}_1(8; -4^2)$ avec 4-résidus $(1, 1)$ à gauche. Une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(6; -2^3)$ avec 2-résidus $(1, 1, 1)$ à droite.

Nous collons maintenant des demi-cylindres infinis aux segments r_i de ce polygone. La surface est obtenue en collant v_i^1 à v_i^2 par translation et rotation d'angle $2\pi/k$ pour $i = 1, 2$. On vérifie facilement que cette k -différentielle possède un unique zéro. De plus, la différentielle associée est primitive. Cette surface est de genre 1 car on la déconnecte en coupant les courbes correspondant aux v_i^j et une autre courbe fermée. C.Q.F.D.

Lemme 5.8. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ est surjective si s est impair et contient $\mathcal{R}^2(2s; (-2^s)) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$ si s est pair.*

Démonstration. Par le lemme 5.7, il suffit de considérer le cas où les 2-résidus (R_1, \dots, R_s) sont des nombres strictement positifs. On dénote par r_i la racine positive de R_i .

Supposons que au moins deux R_i soient distincts. On peut alors ordonner les r_i par longueur croissante. Coupons le segment r_1 en deux segments de longueur l_1 et l_2 . Nous pouvons maintenant couper r_2 en deux segments de longueur l_2 et l_3 . Nous continuons cette procédure jusqu'à avoir couper tous les r_i en deux segments. On peut clairement choisir l_1 tel que l_{s+1} est strictement supérieur à l_1 . Coupons alors le segment l_{s+1} en trois segments avec l_1 au milieu et deux autres segments l_{s+1}^j de même longueur avec $j \in \{1, 2\}$.

La surface est donnée par les collages suivant. On colle un demi-cylindre infini au dessus de chaque segment r_i . Les segments l_i sont collés ensemble par rotation ainsi que l_{s+1}^1 avec l_{s+1}^2 . La différentielle quadratique ainsi obtenue est primitive grâce aux identifications des l_{s+1}^j . On vérifie sans problèmes qu'elle est de genre 1 et possède un unique zéro.

Il nous reste à considérer le cas où s est impaire et tous les résidus quadratiques sont égaux à 1. Pour cela, nous prenons $\lceil s/2 \rceil$ racines égales à 1 et $\lfloor s/2 \rfloor$ racines égales à -1 . Nous concaténons les résidus positifs à partir du point 0 et négatifs à partir du point $1/2$. Puis nous connectons respectivement les points initiaux et finaux avec deux segments égaux à $1/4$. Cette construction est représentée sur le dessin de droite de la figure 26. Pour obtenir la surface souhaitée, nous collons des demi-cylindres infinis aux segments 1 et -1 . Enfin, le segment de gauche (resp. droite) reliant les deux points initiaux est collé par rotation au segment de gauche (resp. droite) reliant les deux points finaux. C.Q.F.D.

Lemme 5.9. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ où s est paire et $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ est surjective.*

Démonstration. Par éclatement de zéro, le lemme 5.8 implique qu'il suffit de prouver que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle de ces strates. Nous prouvons ce résultat par récurrence sur le nombre (pair) de pôles d'ordre 2. Nous ajoutons dans l'hypothèse de récurrence qu'il existe un lien selle entre les deux zéros et un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre maximal à lui même.

Pour $s = 2$, il y a les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -2, -2)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -2, -2)$ à considérer. Des différentielles quadratiques dans ces strates avec 2-résidus $(1, 1)$ sont représentées dans la figure 25 en blanc. L'existence des liens selles est clair comme ci-dessus est claire.

Supposons par récurrence qu'il existe une 2-différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec 2-résidus $(1, \dots, 1)$ et $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$. Si $a_2 \geq a_1$, nous construisons une différentielle quadratique dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1+2, a_2+2; -2^{s+2})$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2+4; -2^{s+2})$. De plus ces différentielles vérifient de nouveau les hypothèses de récurrence.

Pour ajouter 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal, nous prenons le lien selle fermé connectant ce zéro à lui-même (existe par hypothèse de récurrence). Prenons un parallélogramme dont l'un des segments est donné par l'holonomie de ce lien selle et les autres arêtes sont les vecteurs 1. Nous coupons le lien selle et collons les bords du parallélogramme aux segments créés. Enfin nous collons des demi-cylindres infinis de circonférence 1 aux deux autres segments. La différentielle obtenue à partir de la différentielles à gauche de la figure 25 est représentée à gauche de la figure 27. Pour ajouter 2 à l'ordre des deux zéros, il suffit de faire la même construction en coupant un lien selle entre les deux zéros. Cette construction est représentée à droite de la figure 27).

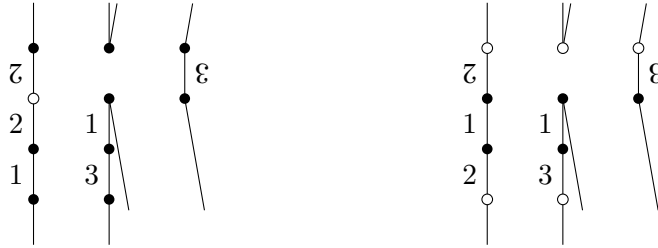


FIGURE 27. Différentielle quadratique dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(9, -1; -2^4)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(4, 4; -2^4)$ avec 2-résidu $(1, 1, 1, 1)$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que toutes les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; -2^s)$ avec $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ peuvent s'obtenir en ajoutant 2 à l'ordre des deux zéros ou 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal. C.Q.F.D.

Lemme 5.10. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ différentes de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(s+1, s-1; (-2^s))$ avec s pair est surjective.*

Démonstration. Si $k \geq 3$, l'éclatement des zéros et la couture d'anse à partir des différentielles données par le lemme 5.7 donne la surjection pour toutes les strates avec $g \geq 1$.

Supposons $k = 2$. Si $g = 1$, alors nous avons montré le résultat pour au plus deux zéros dans les lemmes précédent. Pour les strates avec $n \geq 3$ zéros, nous utilisons l'éclatement des zéros à partir des strates ayant deux zéros. Si $g \geq 2$, il suffit de montrer que l'image de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_2(2s+4; (-2^s))$ avec s pair contient $(1, \dots, 1)$. En effet, si c'est le cas l'éclatement des zéros et la couture d'anse impliqueront le résultat. Pour cela, prenons une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s+4; (-2^{s+2}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1, -1, -1)$ (cette différentielle existe par le lemme 5.7). Nous formons une différentielle quadratique entrelacée en collant les deux pôles avec les résidus quadratiques -1 . Par la proposition 2.3, cette différentielle entrelacée est lissable et une différentielle obtenue par lissage possède les propriétés souhaitées. C.Q.F.D.

Lemme 5.11. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbf{C}^*)^s \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Rappelons que nous ne considérons que les différentielles quadratiques primitives. Sinon on pourrait simplement prendre le carré d'une différentielle abélienne dans $\Omega\mathcal{M}_1(s, (-1^s))$ qui a pour résidus $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Démonstration. D'après le lemme 5.8, il suffit de vérifier que les résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle de ces strates.

L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -2^2)$ ne contient pas $(1, 1)$. Sinon en collant ces deux pôles, on obtiendrait une différentielle quadratique entrelacée lissable (voir le lemme 2.3). Une différentielle obtenue par lissage appartiendrait à la strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(4)$, qui est vide par [MS93].

Supposons qu'il existe une différentielle ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ avec $s \geq 2$ dont tous les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$. Nous notons S la surface plate associée à ξ . Sans perte de généralité, on peut supposer que le cœur de S est dégénéré. La surface contient alors $s + 1$ liens selles distincts (voir la section 2.4). En coupant les liens selles de S , nous obtenons s parties polaires d'ordre 2 bordées par $2s + 2$ segments.

Remarquons qu'aucun domaine polaire ne possède un bord formé d'un unique segment. Sinon pour que S ne soit pas singulière il faudrait que l'autre pôle bordé par ce lien selle ait un résidu quadratique strictement supérieur à 1. Donc les graphes domaniaux de S (voir section 2.4) sont de l'une des deux formes suivante.

- (1) Il existe un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- (2) Il existe deux sommets de valence 3 et les autres sont de valence 2.

Dans le graphe domanial de S , il y a des chaînes de sommets de valence 2. Pour tous ces domaines polaires, la somme des longueurs des liens selles est égale à la racine 1 du 2-résidu. Donc dans ces chaînes, l'holonomie des liens selles est alternativement $\theta \in]0, 1[$ et $1 - \theta$. Nous pouvons enlever deux domaines polaires consécutifs de cette surface de la façon suivante. Nous coupons la surface S le long des deux liens selles d'holonomie θ . Puis nous oublions les deux parties polaire et recollons les bords de la surface obtenue par coupure. La surface ainsi obtenue est encore primitive. Nous enlevons de S toutes les paires adjacentes avec deux liens selles jusqu'à obtenir une surface dite *réduite*.

Il suffit maintenant de montrer qu'il n'existe pas de surfaces réduites. Considérons tout d'abord le cas où l'un des sommets du graphe domanial est de valence 4. Les seuls graphes domaniaux possibles comportent un sommet qui a d'où part deux arêtes fermées qui contiennent 0 ou 1 sommet de valence 2. Comme s est pair, le seul graphe domanial possible correspond à une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(4, (-2^2))$ avec résidus $(1, 1)$. Cela montre qu'aucune surface réduite possède ce graphe domanial.

Maintenant, nous considérons les surfaces réduites dont le graphe domanial possède deux sommets de valence trois. Dans ce cas deux types de graphes domaniaux sont possibles. L'un avec trois arêtes entre deux sommets et sur chaque arête 0 ou 1 sommet de valence 2. L'autre avec une arête entre deux sommets et une boucle à chaque sommet. Sinon le nombre de pôles serait impaire ou égale à 2. La seule possibilité est que ces graphes aient 4 sommets. Donc il y a un sommet de valence 2 sur deux arêtes.

Considérons le premier graphe. Due à la présence des deux sommets de valence 2, les longueurs des connections de selle au bord des domaines polaires de valence 3 sont a, b, c et $a, 1 - b, 1 - c$ respectivement avec $a, b, c \in]0, 1[$. Les deux sommes de ces longueurs est égale à 1 si et seulement si $a = 0$, ce qui est impossible.

Dans le cas du second cas, il existe au moins une boucle qui contient un sommet. Comme les longueurs des liens selles au bord du domaine polaire correspondant s'additionnent à 1, on en déduit que le troisième lien selle du domaine polaire correspondant est nul. Cela nous donne la dernière contradiction de cette preuve. C.Q.F.D.

Lemme 5.12. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(s + 1, s - 1; (-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbf{C}^*)^s \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Nous commençons par remarquer que l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(3, 1; -2, -2)$ ne contient pas $(1, 1)$. Sinon on pourrait former une différentielle entrelacée lissable en recollant les deux pôles doubles. La différentielle quadratique obtenue en la lissant serait dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(3, 1)$, qui est vide par [MS93].

Nous traitons le cas $s \geq 4$ par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2(s - 1, s + 1; (-2^s))$ avec pour résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$.

Dans un premier temps nous simplifions la différentielle quadratique puis nous montrons que les différentielles simplifiées n'existent pas.

Nous supposons que le cœur de la différentielle est dégénéré et qu'il y a donc $s + 2$ connexions de selle horizontales (voir section 2.4). Coupons le long des liens selles la surface. Comme dans la preuve du lemme 5.11, les domaines polaires sont bordés par au moins 2 segments. Les domaines polaires dont le bord est composé par strictement plus de deux segments sont appelés *spéciaux*. La valence des sommets correspondants dans le graphe domaniale peuvent être de la forme (6), (5, 3), (4, 4), (4, 3, 3) ou (3, 3, 3, 3).

Nous considérerons tout d'abord le graphe domaniale simplifié défini dans la section 2.4. On utilisera le vocabulaire des graphes et des surfaces de manière interchangeable. Par exemple, la *valence* d'un pôle est la valence du sommet correspondant dans le graphe domaniale. Les graphes domaniaux simplifiés possibles sont représentés dans la figure 28 (d'autres graphes à priori possibles seront écartés par des considérations générales).

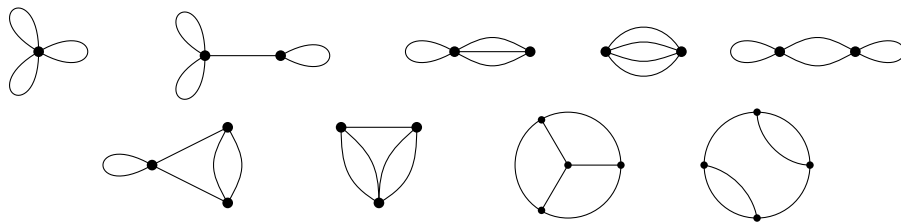


FIGURE 28. Tout les graphes domaniaux simplifiés des surfaces réduites

Commençons par donner une propriété importante des graphes domaniaux. Ces graphes ne peuvent pas contenir de boucle formée d'un nombre impair de sommets de valence 2. Sinon les longueurs des liens selles initial et final s'additionneraient à 1. Cela est impossible car au moins un autre lien selle borde ce domaine polaire spécial.

Cela nous permet d'exclure la possibilité d'un unique pôle spécial de valence 6. En effet, le seul graphe domaniale simplifié possible est la fleur à trois pétales (voir la figure 28). Mais comme le nombre de pôles de la différentielle est par hypothèse pair, il y a au moins une pétale qui contient un nombre impair de sommets de valence 2.

Une première façon de simplifier la surface est d'*enlever* une paire de pôles voisins de valence 2. Cette opération est décrite dans la preuve du lemme 5.11. Remarquons qu'elle diminue l'ordre des deux zéros par 2 ou seulement l'un des deux par 4. Afin de rester dans une strate du type $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s + 1, s - 1; (-2^s))$, nous autorisons cette opération si et seulement si les liens selles connectent les deux zéros entre eux ou le zéro d'ordre maximal à lui même. Remarquons qu'après avoir enlever une paire avec des liens selles connectant au zéro d'ordre maximal, celui-ci devient le zéro d'ordre minimal. Ainsi en jouant au ping-pong, on pourra enlever de nombreuses paires de pôles. En particulier, après avoir enlever toutes les paires de sommets possibles, les paires restantes sont bordées par des liens selles entre le zéro d'ordre minimal. À partir de maintenant, nous considérons uniquement des surfaces où il n'est pas possible d'enlever une paire de pôles.

Nous montrons maintenant qu'il n'est pas possible d'avoir une boucle dans le graphe domaniale simplifié à un sommet de valence 3. Comme nous l'avons remarqué, le nombre de sommets de valence deux sur cette boucle doit être pair. Si ce nombre est zéro, alors nous aurions un zéro d'ordre -1 sur cette surface. Mais ce cas ne se présente dans aucune des strates considérées. Si le nombre de sommets sur cette boucle était strictement positif, alors le pôle de valence 3 serait bordé uniquement par les connexions de selles entre le zéro d'ordre minimum et lui même. La connexion de selle se situe entre ce domaine polaire un domaine polaire distinct. Cela implique qu'au moins deux autres segments au bord d'un

autre domaine polaire spécial possèdent ce zéro à une extrémité. Nous faisons maintenant une analyse au cas par cas.

Dans le cas $(5, 3)$ cela implique que la contribution angulaire des pôles spéciaux au zéro d'ordre inférieur est d'au plus 5π . Ainsi leurs contributions angulaires au zéro d'ordre maximal est d'au plus 3π . Comme l'extrémité de trois des cinq segments du bord du domaine de valence 5 contiennent le zéro d'ordre minimal, au plus une boucle au sommet de valence 5 peut être bordée par des liens selles connectant le zéro maximal à lui même. Comme il existe au maximum un pôle de valence deux sur cette boucle, l'ordre du zéro minimal est supérieur à celui du zéro d'ordre maximal. Ce qui est absurde. Dans les deux autres cas $(4, 3, 3)$ et $(3, 3, 3, 3)$ une analyse similaire aboutit à la même contradiction.

Nous poursuivons en montrant qu'il existe au plus 1 pôle de valence 2 sur une arête du graphe simplifié. Supposons qu'il existe une arête avec plus de 2 sommets. Les liens selles correspondants relient le zéro d'ordre minimal à lui même. Soit cette arête connecte un pôle de valence 3 à un autre sommet spécial. Soit c'est une boucle à un sommet de valence 5 ou 4. On vérifie facilement que dans les deux cas cela entraîne que le zéro d'ordre minimal est l'extrémité de liens selles de deux sommets du graphe domaniaux simplifié. Cela entraîne, de manière analogue au paragraphe précédent, que la contribution angulaire au zéro d'ordre minimal est plus grande que celle au zéro d'ordre maximal. On en déduit la même contradiction. A partir de maintenant, nous considérerons des graphes domaniaux avec 0 ou 1 sommet de valence 2 sur les arêtes du graphe simplifié.

Considérons le cas où les pôles spéciaux sont de valences $(5, 3)$. Dans ce cas, deux graphes domaniaux simplifiés sont a priori possibles (voir la figure 28). Le premier a une boucle à un pôle de valence 3 et est donc impossible. Le second graphe a trois arêtes entre les deux sommets spéciaux et une boucle au sommet de valence 5. Comme nous considérons des strates avec un nombre pair supérieur à 4 pôles, il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur les arêtes. Si il y en avait 4, alors il y aurait un sommet sur la boucle, ce qui est impossible. Donc il y a forcément deux sommets sur les arêtes joignant les deux sommets spéciaux. Dénotons par $0 < a, b, c < 1$ les longueurs des connections de selles bordant le pôle de valence 3. Les longueurs des liens selles au pôles de valence 5 seront donc $a, 1-b, 1-c$ et $2d$ avec $d > 0$. Comme par hypothèse $a + b + c = 1$ on a $a + 2 - b - c + 2d = 1 + 2a + 2d > 1$. Ce qui contredit le fait que le résidu quadratique à ce pôle est 1.

Dans le cas $(4, 4)$, il y a deux graphes simplifiés possibles. Considérons tout d'abord le graphe avec 4 arêtes entre les deux sommets spéciaux. Il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur ces arêtes. Les longueurs des liens selles à un pôle spécial sont $0 < a, b, c, d < 1$ avec $a + b + c + d = 1$. À l'autre pôle spécial, il y a au moins deux longueurs de la forme $1 - a, 1 - b$. Donc le résidu à ce pôle est strictement supérieur à 1.

Le second graphe simplifié possède deux boucles et deux arêtes connectant les pôles spéciaux (voir la figure 28). La seule possibilité est qu'il y ai deux sommets non spéciaux sur les arêtes connectant les pôles spéciaux. On obtient comme précédemment une contradiction en considérant les longueurs des liens selles.

Nous définissons maintenant une nouvelle opération sur des pôles voisins appelée *fusion*. Prenons deux pôles d'ordres 2 connectés par au moins un lien selle. Nous pouvons alors remplacer ces deux pôles par un pôle d'ordre 4, voir la figure 29. Remarquons que cette opération ne modifie ni l'ordre, ni le résidu des autres singularités. De plus, la différentielle ainsi modifiée reste primitive. Enfin, le résidu du pôle d'ordre 4 ainsi créer est nul.

Maintenant, nous traitons le cas où les pôles spéciaux sont de valences $(4, 3, 3)$. Il n'y a que deux graphes domaniaux simplifiés a priori possibles (voir la figure 28). Pour le graphe qui à une boucle au pôle de valence 4, il peut y avoir 1, 3 ou 5 pôles supplémentaires de valence 2. Ce dernier cas est impossible car il y aurait un sommet de valence 2 sur la boucle. Si on avait 1 sommet supplémentaire, alors on pourrait fusionner les pôles par paires afin d'obtenir une différentielle dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, 3; -4, -4)$ dont les résidus soient

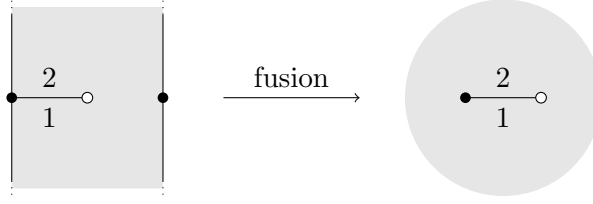


FIGURE 29. La fusion de deux pôles doubles en un pôle d'ordre 4.

nuls. Nous avons montré qu'une telle différentielle n'existe pas dans le lemme 5.6. Donc la différentielle originale ne peut pas exister. Les cas avec trois pôles supplémentaires se traite aussi par fusion.

Dans le cas du graphe domanial simplifié qui ne possède pas de boucle, nous pouvons avoir 1, 3 ou 5 pôles de valence 2 supplémentaires. Le cas avec 5 pôles est impossible à cause des longueurs des connections de selle. En effet, les longueurs des connections de selle entre le pôle de valence 4 et l'un des pôles de valence 3 sont a et b avec $a + b > 1$ à un pôle, et $1 - a$ et $1 - b$ avec $2 - a - b < 1$ à l'autre. Cela est clairement impossible. Enfin les cas avec 1 et 3 sommets de valence 2 peuvent se traiter avec la fusion en se ramenant au lemme 5.6.

Pour conclure, nous considérons le cas des graphes dont les sommets spéciaux sont de valence $(3, 3, 3, 3)$. Les graphes possibles sont représentés dans la figure 28. Nous considérons tout d'abord le graphe complet K_4 . Pour 0, 2 or 4 pôles de valence deux sur les arêtes, l'impossibilité peut se montrer en se ramenant au lemme 5.6 par fusion. S'il y a six pôles de valence 2, nous regardons les longueurs des liens selles aux pôles spéciaux. Les longueurs de celles bordant le sommet central sont de longueur a , b et $1 - a - b$. Les longueurs des liens selles correspondants bordant les autres sommets spéciaux sont $1 - a$, $1 - b$ et $a + b$. Considérons le pôle avec le lien selle de longueur $a + b$. Il a un autre lien de selle de longueur c . La longueur du lien selle correspondant sur l'autre pôle spécial (disons celui avec le lien selle de longueur $1 - a$) est $1 - c$. Le troisième lien selle de ce pôle est de longueur $a + c - 1$. En continuant notre voyage autour du cercle, nous trouvons que la longueur des liens selles du pôle d'où nous sommes parti sont $a + b$, c et $3 - a - b - c$. La somme est 3 ce qui est la contradiction souhaitée.

Enfin nous considérons le graphe en forme de balle de tennis. Comme précédemment, les cas où il y a 0, 2 ou 4 pôles de valence 2 supplémentaires peut être traité par fusion. Pour 6 pôles supplémentaires, une analyse de la longueur des liens selles similaire au cas du graphe K_4 , permet d'obtenir la dernière contradiction de cette preuve. C.Q.F.D.

5.3. Pluridifférentielles d'aires finies : preuve du théorème 1.4. Dans ce dernier paragraphe nous montrons que les strates primitives $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ en genre $g \geq 1$ sont vides si et seulement si $\mu = \emptyset$ ou $\mu = (1, -1)$ en genre 1 ou $\mu = (4)$ et $\mu = (3, 1)$ pour $k = 2$. Toutes les k -différentielles de type (\emptyset) sont la puissance k ième d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. De plus, les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$ sont vides par le théorème d'Abel. Pour les deux strates quadratiques vides de genre 2, nous renvoyons à [MS93]. Notre but est donc de montrer que toutes les autres strates sont non vides.

Pour le genre un, il existe des k -différentielles de type μ pour tout $\mu \neq (1, -1)$. Supposons que $\mu := (a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$, il reste à montrer que certaines d'entre elles sont primitives. Étant donné un tore X , il existe un diviseur $D := \sum a_i z_i$ sur X linéairement équivalent à zéro tel que pour tout diviseur d des a_i , le diviseur $\sum \frac{a_i}{d} z_i$ n'est pas linéairement équivalent à zéro (voir par exemple [Boi15]). La k -différentielle ayant pour diviseur D est clairement primitive.

Soit $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de genre $g \geq 2$ avec $a_i > -k$. Si (a_1, \dots, a_n) est différent de $(4g - 4)$ et $(2g - 1, 2g - 3)$ dans le cas quadratique, alors, par le théorème 1.2,

la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; (-2k)^{g-1})$ contient une différentielle primitive (X_0, ω_0) dont tous les k -résidus sont nuls. On obtient une différentielle entrelacée en attachant une k -différentielle qui est la puissance k ième d'une différentielle holomorphe sur un tore aux pôles de X_0 . Cette pluridifférentielle entrelacée est lissable par le lemme 2.4. Les lissages sont clairement des k -différentielles primitives. Donc ces strates sont non vides.

Enfin il reste le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g-4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_g(2g-1, 2g-3)$. En utilisant le scindage de zéro, il suffit de montrer que la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g-4)$ est non vide pour tout $g \geq 3$. Nous savons que $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4(g-1); (-4)^{g-2})$ contient une différentielle primitive sans résidus quadratiques aux pôles. On obtient une différentielle quadratique entrelacée en attachant à chaque pôle le carré d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. Les différentielles quartiques obtenues par lissage sont dans $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g-4)$ comme souhaité.

6. APPLICATIONS.

Nous donnons quelques applications élémentaires de nos résultats. Une connaissance des notions introduites dans [BCGGM16a] et [BCGGM16b] est recommandée.

6.1. Limites des points de Weierstraß : preuve de la proposition 1.15. L'étude des limites des points de Weierstraß dans la compactification de Deligne-Mumford a explosé grâce aux travaux d'Eisenbud et Harris sur les séries linéaires limites (voir e.g. [EH87]). Un désavantage de leur méthode est de se restreindre aux courbes de type compact. Esteves et Medeiros l'ont étendue aux courbes ayant deux composantes dans [EM02]. Nos résultats et la description de la compactification de la variété d'incidence de [BCGGM16a] permettent une description complète (en théorie) des limites de points de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$.

Nous montrons tout d'abord que la fermeture du lieu de Weierstraß ne rencontre pas celui des courbes stables X où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué (voir [EH87, Theorem 3.1]). Ces courbes sont figurées à gauche de la figure 30.

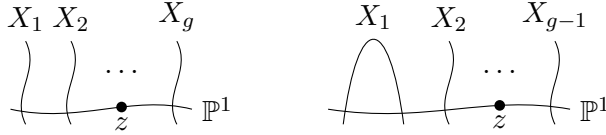


FIGURE 30. Les courbes pointées considérées dans la proposition 1.15.

La fermeture du lieu de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ coïncide avec la projection de la compactification de la variété d'incidence de $\Omega \mathcal{M}_g(g, 1, \dots, 1)$ (voir [BCGGM16a, Section 3.6]). Par le théorème 1.3 de l'article loc. cit., il suffit de montrer que la qu'il n'existe pas de différentielle entrelacée lissable sur une courbe semi-stablement équivalente à X .

Si c'était le cas, sa restriction ξ_0 à \mathbb{P}^1 possède un zéro d'ordre supérieur à g . De plus, ξ_0 posséderait soit un pôle d'ordre -2 soit un zéro à un nœud entre \mathbb{P}^1 et une courbe elliptique. L'inégalité (1.5) est alors satisfaite par ξ_0 et le théorème 1.5 implique qu'au moins deux pôles possèdent des résidus non nuls. La *condition résiduelle globale* de [BCGGM16a] n'est donc pas satisfaite et cette différentielle entrelacée n'est pas lissable.

Maintenant, nous montrons que la fermeture du lieu de Weierstraß intersecte le lieu où $g-1$ courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué et l'une de ces courbes elliptiques est attachée par deux points au \mathbb{P}^1 . Ces courbes sont représentées à droite de la figure 30.

Il suffit construire une différentielle entrelacée lissable de type $(g, (1^{g-2}))$. Sur toutes les courbes elliptiques, on prend la différentielle holomorphe. Sur la courbe projective, on prend une différentielle dans $\Omega \mathcal{M}_0(g, (1^{g-2}); (-2^g))$ avec $g-2$ résidus nuls. Une telle différentielle existe par le théorème 1.5. On colle alors la courbe elliptique X_1 aux deux pôles dont les résidus ne sont pas nuls. Les autres courbes elliptiques sont collées aux pôles

dont les résidus sont nuls. On vérifie que cette différentielle entrelacée est lissable grâce à [BCGGM16a, Theorem 1.3].

6.2. Éclatement de zéros : preuve de la proposition 1.16. L'idée de scinder les singularités coniques d'une métrique plate est ancienne. Dans le cas des métriques induites par une différentielle abélienne, une belle construction à été proposée en autres par Eskin, Kontsevich, Masur et Zorich (voir [EMZ03, §8.1]). En revanche, pour les différentielles quadratiques Boissy, Lanneau, Masur et Zorich ont remarqué qu'une telle construction peut ne pas être possible de manière locale (voir [MZ08]). La compréhension de la variété d'incidence des strates de pluridifférentielles permet de comprendre ce phénomène (voir [BCGGM16b, Example 7.1]). Nous pouvons maintenant caractériser les cas où l'éclatement d'une singularité conique n'est pas possible localement.

L'éclatement d'un zéro d'ordre $a > -k$ en zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) correspond au lissage d'une k -différentielle entrelacé. Cette k -différentielle entrelacée est constituée d'une k -différentielle sur \mathbb{P}^1 avec des zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) et un pôle d'ordre $-a - 2k$ attaché au zéro d'ordre a (voir la proposition 2.5). Il existe une telle différentielle est lissable localement si et seulement si il existe une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -2k - a)$ dont le k -résidu au pôle est nul. La proposition est alors une conséquence directe du théorème 1.10 et de l'équation (2.1).

6.3. Cylindres dans une surface plate : preuve de la proposition 1.17. Naveh ([Nav08]) nous apprend que dans une strate de différentielles abéliennes, le nombre maximal de cylindres disjoints pour une surface donnée est $g + n - 1$. Nous décrivons l'holonomie des géodésiques de cylindres disjoints que peut contenir une surface plate. On fixe une strate $S := \Omega \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ et une famille de nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C}^*$.

Supposons qu'il existe une différentielle ω de S qui possède une famille de t cylindres disjoints de circonférences $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Nous montrons l'existence d'une différentielle stable dont les zéros sont d'ordres (a_1, \dots, a_n) avec des pôles simples aux nœuds dont les résidus sont $\pm \lambda_i$. Coupons ω le long d'une d'une géodésique périodique dans chaque cylindre. Nous pouvons alors remplacer les demi-cylindres obtenus par des demi-cylindres infinis. On obtient donc un différentielle entrelacée telle que les pôles aux nœuds soient simples. De plus, les résidus sont donnés par plus ou moins l'holonomie des géodésiques des cylindres.

La direction réciproque de cette proposition est une application directe du lissage des nœuds des différentielles stables avec pôles simples aux nœuds (voir le lemme 2.3).

Dans le cas des strates minimales, ces différentielles entrelacées sont irréductibles. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6.1. *Les nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ apparaissent comme vecteur d'holonomie de cylindres disjoints d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_g(2g - 2)$ si et seulement si le $2t$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_t, -\lambda_1, \dots, -\lambda_t)$ est dans l'image de $\mathfrak{R}(2g - 2; (-1^{2t}))$.*

Nous énonçons maintenant la proposition 1.17 dans le langage des *représentations en graphe* développé par [Tah16]. L'idée est de considérer le graphe dual de la différentielle entrelacée de la proposition. Un théorème de [Tah16] permet de caractériser de façon combinatoire les graphes qui apparaissent pour une strate donnée. Nous allons les enrichir de façon à prendre également en compte les circonférences des cylindres.

Soit une strate $\Omega \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$. Une *représentation en graphe enrichie de niveau u* $(G, f_0, \dots, f_u, g_0, \dots, g_u)$ est définie de la sorte. Le graphe G est connexe avec $u+1$ sommets de valences v_0, \dots, v_u et t arêtes (il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets). Les entiers naturels g_0, \dots, g_u sont des poids associés à chaque sommet. Les nombres a_1, \dots, a_n sont répartis en $u + 1$ familles f_i telles que :

- (i) il y a au moins un nombre parmi (a_1, \dots, a_n) dans chaque famille f_i ;
- (ii) chaque somme $\sigma(i)$ des éléments de f_i vérifie $\sigma(i) + v_i = 2g_i - 2$;

(iii) aucune arête ne déconnecte le graphe.
 La proposition 1.17 s'énonce alors de la sorte.

Proposition 6.2. *Soient $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$. Il existe une différentielle dans S qui possède une famille de t cylindres disjoints dont les circonférences sont λ si et seulement si il existe une représentation en graphe G avec t arêtes et une attribution de chaque élément de $\lambda, -\lambda$ à un chaque demi-arête de telle façon que les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- i) Sur chaque arête, on a les nombres $\lambda_i, -\lambda_i$;*
- ii) Les λ_i associés aux demi-arêtes de chaque sommet i doit être une configuration de résidus réalisable dans $\Omega\mathcal{M}_{g_i}(f_i, (-1^{v_i}))$.*

RÉFÉRENCES

- [BCGGM16a] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Compactification of strata of abelian differentials*. In : *ArXiv e-prints* (avr. 2016). arXiv : 1604.08834.
- [BCGGM16b] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Strata of k -differentials*. In : *ArXiv e-prints* (oct. 2016). arXiv : 1610.09238.
- [Boi15] Correntin BOISSY. *Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials*. In : *Comment. Math. Helv.* 90.2 (2015), p. 255–286.
- [Dia00] Homero DIAZ-MARIN. *Meromorphic quadratic differentials with prescribed singularities*. In : *Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Sér.* 31.2 (2000), p. 189–204.
- [EH87] David EISENBUD et Joe HARRIS. *Existence, decomposition, and limits of certain Weierstrass points*. In : *Invent. Math.* 87 (1987), p. 495–515.
- [EMZ03] Alex ESKIN, Howard MASUR et Anton ZORICH. *Moduli spaces of Abelian differentials : the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants*. In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 97 (2003), p. 61–179.
- [EM02] Eduardo ESTEVES et Nivaldo MEDEIROS. *Limit canonical systems on curves with two components*. In : *Invent. Math.* 149.2 (2002), p. 267–338.
- [KZ03] Maxim KONTSEVICH et Anton ZORICH. *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*. In : *Invent. Math.* 153.3 (2003), p. 631–678.
- [Lan08] Erwan LANNEAU. *Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials*. In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 41.1 (2008), p. 1–56.
- [MS93] Howard MASUR et John SMILLIE. *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*. In : *Comment. Math. Helv.* 68.2 (1993), p. 289–307.
- [MZ08] Howard MASUR et Anton ZORICH. *Multiple saddle connections on flat surfaces and the principal boundary of the moduli spaces of quadratic differentials*. In : *Geom. Funct. Anal.* 18.3 (2008), p. 919–987.
- [Nav08] Yaron NAVEH. *Tight upper bounds on the number of invariant components on translation surfaces*. In : *Isr. J. Math.* 165.1 (2008), p. 211–231.
- [Rey89] Eric REYSSAT. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Boston, MA etc. : Birkhäuser, 1989, p. vii + 166.
- [Sai10] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010, p. 544.

- [Str84] Kurt STREBEL. *Quadratic differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5. Berlin etc. : Springer-Verlag. XII, 184 p. 1984.
- [Tah16] Guillaume TAHAR. *Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order*. In : *ArXiv e-prints* (juin 2016). arXiv : 1606.03705.
- [Tro86] Marc TROYANOV. *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*. In : *Enseign. Math. (2)* 32 (1986), p. 79–94.

(Quentin Gendron) INSTITUT FÜR ALGEBRAISCHE GEOMETRIE, LEIBNIZ UNIVERSITÄT HANNOVER, WELFENGARTEN 1, 30167 HANNOVER, GERMANY
E-mail address: `gendron@math.uni-hannover.de`

(Guillaume Tahar) INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - UMR CNRS 7586
E-mail address: `guillaum.tahar@imj-prg.fr`