

DIFFÉRENTIELLES À SINGULARITÉS PRESCRITES

QUENTIN GENDRON AND GUILLAUME TAHAR

ABSTRACT. We study the local invariants that a meromorphic k -differential on a Riemann surface of genus $g \geq 0$ can have. These local invariants are the orders of zeros and poles, and the k -residues at the poles. We show that for a given pattern of orders of zeroes, there exists, up to a few exceptions, a primitive k -differential having these orders of zeros (see Theorem 1.4). The same is true for meromorphic k -differentials and in this case, we describe the tuples of complex numbers that can appear as k -residues at their poles. For genus $g \geq 2$, and even $g = 1$ if $k \neq 2$, it turns out that every expected tuple appears as k -residues (see Theorem 1.1). On the other hand, some expected tuples are not the k -residues of a k -differential in some remaining strata. This happens for $k = 1$ or $k \geq 3$ in genus zero for a finite number (up to simultaneous scaling) of them. The abelian case is particularly interesting since the missing possibilities are either the zero tuple or special collinear numbers (see Theorem 1.5). In the quadratic differentials cases, we show that one tuple can not be obtained in four families of strata in genus one (see Theorem 1.2). In genus zero, up to a 2-dimensional locus can be impossible to realise as residu of quadratic differentials in some strata (see in particular Theorem 1.13). We also give consequences of these results in algebraic and flat geometry.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Boîte à outils	8
3. Différentielles abéliennes méromorphes	13
4. Pluridifférentielles en genre zéro	24
5. Pluridifférentielles en genre supérieur ou égal à un.	55
6. Applications.	68
Références	70

1. INTRODUCTION

Soient X une surface de Riemann de genre g et K_X son fibré en droites canonique. Les sections méromorphes de K_X sont les *différentielles abélienne* de X et les sections du produit tensoriel $K_X^{\otimes k}$ sont les *pluridifférentielles* ou *k -différentielles* de X . Localement, une k -différentielle s'écrit $f(z)(dz)^k$, où f est une fonction méromorphe.

Il est bien connu (voir par exemple [Sai10, Encadré III.2]) que les invariants en un point P d'une différentielle abélienne ω sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *résidu* $\text{Res}_P(\omega)$ de celle-ci dans le cas où P est un pôle de ω . Ce résultat a été étendu au cas des différentielles quadratiques dans [Str84] et à toutes les pluridifférentielles dans [BCGGM19]. Plus précisément, les invariants en P d'une pluridifférentielle ξ sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *k -résidu* $\text{Res}_P^k(\xi)$, si P est un pôle de ξ .

Ces invariants ne peuvent pas être fixés arbitrairement mais vérifient certaines relations. Tout d'abord le k -résidu d'un pôle d'ordre $-k$ est toujours non nul alors que le k -résidu d'un pôle dont l'ordre n'est pas divisible par k est toujours nul. Ensuite, la somme des ordres

Date: 9 janvier 2019.

Key words and phrases. Abelian differential, Flat surface, Residue, k -differentials.

des zéros et des pôles d'une k -différentielle est égale à $k(2g - 2)$. Enfin, dans le cas des différentielles abéliennes, la somme des résidus s'annule.

Il existe deux théorèmes célèbres donnant l'existence de pluridifférentielles méromorphes avec des conditions locales prescrites.

Le premier est le théorème de Riemann-Roch (voir le théorème 9.3 de [Rey89]) qui permet d'obtenir certaines pluridifférentielles avec des ordres fixés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les résidus de ces pluridifférentielles. De plus, il est souvent délicat d'en déduire des résultats pour tous les ordres que nous pouvons considérer. Par exemple, les résultats d'existence les plus fins que nous ayons (voir [MS93] et [Dia00] dans le cas abélien et quadratique respectivement dans le cas holomorphe et méromorphe et [Tro86] pour les k -différentielles holomorphes) ne font que peu appel à des résultats algébriques.

Le second théorème est le théorème de Mittag-Leffler (voir la proposition 9.3 de [Rey89]) qui démontre l'existence de différentielles avec l'ordre des pôles et les résidus correspondants imposés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les zéros de ces différentielles.

Dans cet article, nous nous proposons de répondre à la question suivante.

Étant donnés les ordres des zéros et pôles ainsi que les résidus aux pôles, existe-il une pluridifférentielle (primitive) ayant ces invariants locaux?

1.1. Définitions. Afin de préciser la question centrale, nous introduisons un certain nombre de notions. Nous dénoterons par

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$$

une partition de $2g - 2$ qui contient s fois -1 , où les a_i sont des nombres strictement positifs et les b_i sont supérieurs ou égaux à 2. De même, les partitions de $k(2g - 2)$ seront notées

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s)),$$

où les a_i sont supérieurs ou égaux à $-k + 1$, les $b_i := kl_i$ sont supérieurs ou égaux à $2k$ et divisibles par k , les c_i sont supérieurs ou égaux à k et non divisibles par k et qui contient s fois $-k$. La strate primitive $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . On appelle primitives les k -différentielles qui ne sont pas des puissances de k' -différentielles pour $1 \leq k' < k$. Les strates (non vides) de différentielles sont des orbifolds de dimension $2g - 1 + n$ dans le cas holomorphe et $2g - 2 + n + p + s$ dans le cas méromorphe. Les strates primitives de k -différentielles sont de dimension $2g - 2 + n + p + r + s$. Dans le cas abélien, le théorème des résidus implique que les strates $\Omega \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -1)$ sont vides. Dans la suite nous ne considérerons que des partitions de $2g - 2$ distinctes de celles-ci.

Il est bien connu que le résidu d'une différentielle ω à un pôle simple est non nul et que la somme des résidus de ω est nulle. Donc si $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ est une strate abélienne, on définit l'espace résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}_g(\mu) := \left\{ (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^s : \sum_{i=1}^{p+s} r_i = 0 \right\}. \quad (1.1)$$

Cet espace paramètre l'ensemble des configurations de résidus que peut prendre une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$.

Dans le cas des k -différentielles pour $k \geq 2$, la description change quelque peu. Nous rappelons tout d'abord la notion de k -résidu. Plus de détails sont donnés dans [BCGGM19, Section 3]. Pour une k -différentielle ξ , au voisinage de chaque point P de X , il existe une coordonnée z telle que ξ est de la forme

$$\begin{cases} z^m (dz)^k & \text{si } m > -k \text{ ou } k \nmid m, \\ \left(\frac{r}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m = -k, \\ \left(z^{m/k} + \frac{t}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m < -k \text{ et } k \mid m, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $t \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{C}^*$. Les nombres r et t sont définis à une racine de l'unité près. Le k -résidu de ξ en P est la puissance k ième de r dans le second cas, la puissance k ième de t dans le troisième cas et zéro sinon. Ainsi, le k -résidu est non nul dans le cas des pôles d'ordre $-k$ et peut ne pas être nul uniquement dans le cas des pôles d'ordre divisible par k . Toutefois il n'existe pas de théorème des résidus pour les pluridifférentielles. Ainsi étant donné une strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$, nous définissons l'espace k -résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}_g^k(\mu) := \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^s. \quad (1.3)$$

Cet espace paramètre les configurations de résidus que peut prendre une pluridifférentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$.

Dans tous les cas, l'application résiduelle est donnée par

$$\mathfrak{R}_g^k(\mu) : \Omega^k \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^k(\mu) : (X, \xi) \mapsto (\text{Res}_{P_i}^k(\xi)), \quad (1.4)$$

où les P_i sont les pôles de ξ d'ordre divisible par k . Insistons sur le fait que par définition, les pluridifférentielles de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ sont *primitives*. Le but de cet article est de déterminer l'image de cette application pour chaque strate.

1.2. Genre supérieur ou égal à un. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats centraux de cet article. Rappelons que $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles *primitive* de type μ . Nous donnons d'abord le cas du genre supérieur ou égal à deux.

Théorème 1.1. *Si $g \geq 2$ et μ contient un élément inférieur ou égal à $-k$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_g^k(\mu) : \Omega^k \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^k(\mu)$ est surjective.*

Le cas des strates de genre un est un peu plus complexe. En effet, il existe quatre familles de strates quadratiques exceptionnelles.

Théorème 1.2. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_1(\mu)$ une strate de genre un et μ une partition de $k(2g-2)$ contenant un élément inférieur ou égal à $-k$.*

- i) *Si $k = 2$ et $\mu = (4a; (-4^a))$ ou $\mu = (2a-1, 2a+1; (-4^a))$ pour $a \in \mathbf{N}^*$, alors l'image de $\mathfrak{R}_1^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}_1^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*
- ii) *Si $k = 2$ et $\mu = (2s; (-2^s))$ ou $\mu = (s-1, s+1; (-2^s))$ avec s un entier pair non nul, alors l'image de $\mathfrak{R}_1^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}_1^2(\mu) \setminus \{(1, \dots, 1)\}$.*
- iii) *Dans tout autre cas, l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^k(\mu)$ est surjective.*

En général, les strates de k -différentielles ne sont pas connexes. Les composantes connexes dans le cas abélien ont été classifiées par [Boi15]. Nous étendons les résultats précédents à chaque composante connexe des strates abéliennes.

Proposition 1.3. *Étant donné une composante connexe S d'une strate de différentielles abéliennes $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ avec $g \geq 1$. La restriction à S de l'application résiduelle de $\Omega \mathcal{M}_g(\mu)$ est surjective.*

Enfin nous traitons le cas des strates de différentielles n'ayant que des singularités d'ordre strictement supérieur à $-k$. Ces différentielles correspondent à des surfaces plates à singularités coniques d'aire finie. Notre théorème 1.4 généralise le résultat de [MS93] dont les auteurs n'avaient considéré que les cas abélien et quadratique. Il permet également de préciser [Tro86] qui ne se souciait pas de la primitivité des k -différentielles.

Théorème 1.4. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n)$ une partition de $k(2g-2)$ telle que les a_i soient strictement supérieurs à $-k$. La strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramétrant les différentielles primitives de profil μ est vide si et seulement si*

- i) $g = 1$ et $\mu = (1, -1)$,
- ii) $g = 1$ et $\mu = \emptyset$ et $k \geq 2$,
- iii) $g = 2$, $k = 2$ et $\mu = (4)$ ou $\mu = (3, 1)$.

1.3. Différentielles abéliennes en genre zéro. Pour de nombreuses strates de genre zéro, l'application résiduelle n'est pas surjective. Nous discutons d'abord le cas des différentielles abéliennes.

Théorème 1.5. Soient $g = 0$, $k = 1$ et $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$. L'un des cas suivants est vérifié.

i) Si $s = 0$ et qu'il existe un indice i tel que

$$a_i > \sum_{j=1}^p b_j - (p + 1), \quad (1.5)$$

alors l'image de $\mathfrak{R}_0(\mu)$ est $\mathfrak{R}_0(\mu) \setminus \{0\}$.

ii) S'il n'y a que des pôles simples (i.e. $p = 0$), alors l'image de $\mathfrak{R}_0(\mu)$ est décrite dans les propositions 1.6 et 1.7.

iii) Dans les autres cas, l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0(\mu)$ est surjective.

Nous décrivons maintenant l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Pour cela nous définissons le graphe suivant. Un *graphe de connexions* est un arbre biparti connexe Γ possédant A arêtes, dont les sommets sont partitionnés en $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ et auxquels sont attribués des poids réels strictement positifs, tels que :

- i) la somme des poids des sommets de Γ_+ est égale à celle des poids des sommets de Γ_- ;
- ii) considérant l'opération qui consistant à retirer une feuille et soustraire le poids de ce sommet à celui qui lui est relié, appliquant cette opération entre une et $A - 1$ fois à Γ , on obtient alors des graphes dont les poids sont strictement positifs.

Si les nombres r_1, \dots, r_s sont \mathbf{R} -colinéaires de somme nulle, alors un *graphe associé aux r_i* est un arbre biparti connexe vérifiant les propriétés suivantes. Étant donné $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que $r'_i := \alpha r_i \in \mathbf{R}^*$ pour tout $i \leq s$. Les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont en bijection avec les r'_i positifs (resp. négatifs). Le poids du sommet correspondant à r_i est $|r'_i|$.

Proposition 1.6. Soit $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et un unique zéro d'ordre $s-2$. Les résidus (r_1, \dots, r_s) sont dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si l'une des propriétés est satisfaite.

(1) Les résidus ne sont pas colinéaires.

(2) Il existe un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexion.

Nous montrerons dans la proposition 3.6 que les s -uplets (r_1, \dots, r_s) qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(s-2; (-1^s))$ sont en nombre fini (modulo multiplication par une constante) pour tout $s \geq 2$. De plus, dans ce cas, les r_i sont commensurables entre eux.

Le cas des strates ayant plus de zéros est un peu moins explicite. Afin de décrire l'image de l'application résiduelle, nous faisons appel à la notion de différentielle stable rappelée dans la section 2.

Proposition 1.7. Soit $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et n zéros. Le s -uplet (r_1, \dots, r_s) est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement s'il existe une différentielle stable de genre zéro (X, ω) avec un pôle simple à chaque nœud, dont les autres singularités sont d'ordres $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ et qui possède un unique zéro sur chaque composante irréductible de X .

Cette proposition permet donc d'étudier l'image de l'application résiduelle en se ramenant au cas d'un zéro. De plus, cette condition peut se reformuler en termes de graphes munis de poids. Nous le ferons dans la section 3 et donnerons des exemples.

1.4. Pluridifférentielles en genre zéro. Le cas des pluridifférentielles en genre zéro présente de nombreuses difficultés. En particulier, il existe des strates pour lesquelles le complémentaire de l'image de l'application résiduelle est de dimension 1 ou 2 (modulo dilatations).

Rappelons qu'étant donné une partition

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$$

de $-2k$, l'espace $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . On commence par remarquer (cf lemme 4.1) que ces strates sont non vides si et seulement si $\text{pgcd}(\mu, k) = 1$. Dans la suite, cette condition sera toujours implicitement satisfaite.

Dans le cas où $r \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.8. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est*

- i) $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{0\}$ si $r = 1$ et $s = 0$ et $n = 1$,
- ii) $\mathcal{R}_0^k(\mu)$ sinon.

Nous donnons maintenant la description des strates pour $r = 0$, $s \neq 0$ et $p \neq 0$. S'il y a des pôles d'ordre $-k$, on a la description suivante.

Théorème 1.9. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-k^s))$ avec $s \neq 0$ est surjective sauf dans les cas exceptionnels suivants.*

- i) L'image de $\mathcal{R}_0^2(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$.
- ii) L'image de $\mathcal{R}_0^2(2a - 1; 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$ avec $a \geq 0$.

Dans le cas où $r = s = 0$ et $p \neq 0$, nous n'avons pas obtenu la caractérisation de l'image de l'application k -résiduelle, mais nous avons obtenu la description partielle suivante.

Théorème 1.10. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une strate non vide de genre zéro.*

L'image de l'application k -résiduelle de cette strate contient $\mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ à l'exception des deux familles de strates quadratiques $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 5, 2p + b - 5; -b, -b - 2(-4^{p-2}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 7, 2p + b - 5; -b, -b, (-4^{p-2}))$ avec $p \geq 0$ et $b \geq 4$ pair. Dans le cas de ces strates, l'image de l'application 2-résiduelle est le complémentaire de la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, (0^{p-2}))$.

Si $p = 1$, alors 0 est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si $n \geq 3$.

Si $p \geq 2$ et $n = 2$, alors $(0, \dots, 0)$ n'est pas dans l'image de l'application résiduelle.

Si $p \geq 2$ et $n = 3$, nous donnons une condition sur l'appartenance du p -uplet $(0, \dots, 0)$ à l'image de l'application résiduelle dans la proposition 4.12.

Dans cette proposition, nous n'avons pas traité le cas $p \geq 2$ et $n \geq 4$. Il est similaire au cas $n = 3$, mais la complexité de la condition dans ce cas la rend peu applicable.

Enfin nous donnons la description de l'image par l'application résiduelle des strates telles que $p = r = 0$. Le cas des différentielles quadratiques est très différent du cas des k -différentielles avec $k \geq 3$. Obtenir une caractérisation précise du cas quadratique nécessiterait un autre travail. Nous donnons toutefois un certain nombre de résultats partiels intéressants. Dans les cas où il y a plus de trois zéros, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 1.11. *L'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ est surjective dans les deux cas suivants.*

- 1) $n \geq 4$ et au moins quatre a_i sont impairs.
- 2) $n = 3$ et $a_1 + a_2 < a_3$ avec a_3 pair.

Dans le cas des strates avec deux zéros, la description est très complexe. Si les résidus quadratiques sont sur le même rayon réel issu de l'origine, on peut utiliser une généralisation des graphes de connexion. Toutefois, la combinatoire devient très complexe et il semble difficile de tirer des informations d'une telle description. On pourra toutefois consulter la

proposition 4.24 dans le cas où $a_1 = -1$. Dans ces strates, le concept suivant est important pour comprendre l'application résiduelle.

Définition 1.12. Des nombres R_1, R_2, R_3 sont *triangulaires* s'il existe des racines carrées r_1, r_2, r_3 de ces nombres telles que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

On a alors le résultat surprenant suivant.

Théorème 1.13. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ contient tous les s -uplets qui n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine sauf dans les deux cas suivants.*

- i) *L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 1, 2s + 1; (-2^{2s+2}))$ ne contient pas les 2-résidus proportionnels à $(1, \dots, 1, R, R)$ pour tout $R \in \mathbb{C}^*$.*
- ii) *L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ ne contient pas les résidus quadratiques proportionnels à $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_3)$ où les R_i sont triangulaires.*

Maintenant, nous considérons les strates de k -différentielles pour $k \geq 3$. Mis à part les strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$, toutes les exceptions proviennent du fait que les racines k ème de l'unité engendrent un réseau de \mathbb{C} si et seulement si $k \in \{3, 4, 6\}$.

Théorème 1.14. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ est surjective pour $k \geq 3$ sauf dans les cas suivants.*

- (1) *L'image de $\mathfrak{R}_0^k(-1, 1; -k, -k)$ est $(\mathbb{C}^*)^2 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, (-1)^k)$.*
- (2) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(-1, 4; (-3^3))$ est $(\mathbb{C}^*)^3 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, 1) \cup \mathbb{C}^* \cdot (1, -1, 3i\sqrt{3})$.*
- (3) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(1, 2; (-3^3))$ est $(\mathbb{C}^*)^3 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, 1)$.*
- (4) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(2, 4; (-3^4))$ est $(\mathbb{C}^*)^4 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, -1, -1)$.*
- (5) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(2, 7; (-3^5))$ est $(\mathbb{C}^*)^5 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1^5) \cup \mathbb{C}^* \cdot ((1^4), -1)$.*
- (6) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(2, 10; (-3^6))$ est $(\mathbb{C}^*)^6 \setminus \mathbb{C}^* \cdot ((1^3), (-1^3)) \cup \mathbb{C}^* \cdot (1^6)$.*
- (7) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(7, 5; (-3^6))$ est $(\mathbb{C}^*)^6 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1^6)$.*
- (8) *L'image de $\mathfrak{R}_0^3(16, 5; (-3^9))$ est $(\mathbb{C}^*)^9 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1^9)$.*
- (9) *L'image de $\mathfrak{R}_0^4(-1, 5; (-4^3))$ est $(\mathbb{C}^*)^3 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, -4)$.*
- (10) *L'image de $\mathfrak{R}_0^4(3, 5; (-4^4))$ est $(\mathbb{C}^*)^4 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1^4)$.*
- (11) *L'image de $\mathfrak{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$ est $(\mathbb{C}^*)^4 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, 1, 1)$.*
- (12) *L'image de $\mathfrak{R}_0^4(3, 13; (-4^6))$ est $(\mathbb{C}^*)^6 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1^6)$.*
- (13) *L'image de $\mathfrak{R}_0^6(-1, 7; (-6^3))$ est $(\mathbb{C}^*)^3 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, 1)$.*
- (14) *L'image de $\mathfrak{R}_0^6(-1, 13; (-6^4))$ est $(\mathbb{C}^*)^4 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 1, 1, 1)$.*

1.5. Applications. Nous donnons maintenant quelques applications de nos résultats. Ils fournissent des informations intéressantes couplés avec les théorèmes de [BCGGM18] et [BCGGM19]. Ces travaux décrivent un bord des strates de k -différentielles via le concept de *différentielles entrelacées* (voir section 2). Afin de savoir si une différentielles entrelacée est au bord d'une strate donnée, on a besoin de connaître l'existence de différentielles où l'on connaît les ordres des zéros et des pôles ainsi que des résidus de différentielles. Notre article peut donc être vu comme la dernière pierre dans cette description ensembliste du bord des strates.

Lieu de Weierstraß. La première conséquence est un résultat sur la géométrie de l'espace des modules des courbes pointées. Notons que la première des deux assertions a été prouvée par Eisenbud et Harris dans le théorème 3.1 de [EH87] à l'aide des séries linéaires limites.

Proposition 1.15. Soit $\overline{\mathbb{W}}_g$ l'adhérence dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ du lieu paramétrant les points de Weierstraß des courbes algébriques de genre g .

- i) $\overline{\mathbb{W}}_g$ ne rencontre pas le lieu des courbes stables où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué.
- ii) $\overline{\mathbb{W}}_g$ intersecte le lieu où $g-1$ courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué et l'une de ces courbes elliptiques est attachée par deux points au \mathbb{P}^1 .

Éclatement de zéros. Nous donnons une application dans l'esprit de la géométrie plate. Cette proposition est connue dans le cas abélien [EMZ03] et quadratique [Lan08].

Proposition 1.16. Soient ξ une k -différentielle et z_0 une singularité d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Il est pas possible de scinder localement z_0 en t singularités d'ordres $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ avec $a_0 = \sum \alpha_i$ et $\alpha_i > -k$ si et seulement si $k \geq 2$, $t = 2$, $k \mid a_0$ et $k \nmid \text{pgcd}(\alpha_i)$.

Cylindres sur une surface plate. Nous donnons une application à la géométrie des surfaces plates d'aire finie. Naveh a montré dans [Nav08] que dans une strate de différentielles abéliennes, le nombre maximal de cylindres disjoints pour une surface donnée est $g+n-1$ et que cette borne est toujours atteinte. Nous décrivons les périodes possibles des circonférences de ces cylindres.

Proposition 1.17. Soient $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$. Il existe une différentielle dans S avec t cylindres disjoints dont les circonférences sont $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ si et seulement s'il existe une différentielle stable (X, ω) avec un pôle simple aux t nœuds, telle que les résidus à ces nœuds sont $\pm\lambda_i$ et dont les ordres des autres singularités sont donnés par (a_1, \dots, a_n)

Nous énoncerons ce résultat dans le langage des graphes dans la section 6.

1.6. Organisation de cet article. Le schéma de la preuve de ces théorèmes est le suivant. Dans un premier temps nous utilisons la correspondance entre les (pluri)différentielles méromorphes et certaines classes de surfaces plates introduites par [Boi15] et étudiées dans [Tah18] dans le cas $k = 1$ et par [BCGGM19] dans le cas $k \geq 2$. Cette correspondance nous permet de construire explicitement des pluridifférentielles ayant les propriétés souhaitées lors que le genre et le nombre de singularités sont petits.

Dans un second temps, ce résultat nous déduisons les autres cas grâce à deux opérations introduites par [KZ03] pour $k = 1$, [Lan08] pour $k = 2$ et généralisées par [BCGGM19] pour $k \geq 3$. Ces deux opérations sont l'éclatement d'une singularité et la couture d'anse. La première de ces opérations permet d'augmenter le nombre de singularités sans changer le genre d'une pluridifférentielle. La seconde préserve le nombre de singularités mais augmente le genre de la surface sous-jacente.

Enfin, dans les cas où l'application résiduelle n'est pas surjective, nous développons des méthodes ad hoc afin de montrer la non-existence de pluridifférentielles ayant certains invariants locaux.

L'article s'organise comme suit. Pour terminer cette introduction, nous posons quelques conventions. Dans la section 2 nous faisons les rappels nécessaires sur les représentations plates des pluridifférentielles méromorphes et sur les deux opérations précédemment citées. De plus, nous introduisons dans cette section les briques élémentaires qui nous permettront de construire les pluridifférentielles avec les propriétés souhaitées. La section 3 est dédiée aux différentielles abéliennes. La section 4 est dédiée au cas des pluridifférentielles de genre 0. La section 5 est dédiée aux cas des pluridifférentielles de genre supérieur ou égal à 1. Enfin les preuves des applications de la section 1.5 sont données dans la section 6.

Nous conseillons au lecteur pressé de restreindre sa lecture aux sections 2, 3 et 6.

1.7. Conventions. Dans cet article nous définirons le *résidu* d'une forme différentielle comme étant le résidu usuel multiplié par la constante $2i\pi$. En particulier, le théorème des résidus s'énonce

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \text{Res}_{P_i} \omega,$$

où les P_i sont les pôles de ω encerclés par γ . De plus, pour une k -différentielle, le k -résidu sera $(2i\pi)^k$ fois le k -résidu défini par l'équation (1.2). Remarquons que ces conventions n'ont aucune incidence sur l'énoncé des résultats, mais rend les preuves plus agréables.

Pour une k -différentielle ξ , nous appelons *zéro* une singularité de ξ d'ordre strictement supérieur à $-k$ et *pôle* une singularité d'ordre inférieur ou égal à $-k$. Le k -résidu d'une k -différentielle sera noté avec une lettre majuscule R tandis qu'une racine k ème de R sera notée par une lettre minuscule r . Cette convention de langage peut paraître curieuse, mais sera extrêmement commode.

Si une strate paramètre des différentielles avec m singularités égales à a , alors nous noterons cela (a^m) . Par exemple $\Omega\mathcal{M}_3(3, 3; -1, -1)$ pourra être notée $\Omega\mathcal{M}_3((3^2); (-1^2))$. Plus généralement, si nous considérons une suite (a, \dots, a) de m nombres complexes tous identiques, nous noterons cette suite (a^m) . Nous espérons que ces notations seront claires par le contexte.

1.8. Remerciements. Nous remercions Corentin Boissy pour des discussions enrichissantes liées à cet article. Une question de David Auricino est à l'origine de la proposition 1.17. Le logiciel *GeoGebra* a procuré une aide substantielle au premier auteur. Enfin, nous remercions le rapporteur anonyme dont les nombreuses remarques ont grandement amélioré la qualité de cet article.

2. BOÎTE À OUTILS

Dans cette section, nous introduisons les objets et les opérations à la base de nos constructions. Nous commençons par quelques rappels sur les pluridifférentielles dans la section 2.1. Ensuite nous introduisons dans la section 2.2 les briques élémentaires de nos constructions. Nous poursuivons par un rappel sur les différentielles entrelacées et les opérations de scindage de zéro et de couture d'anse dans la section 2.3. Enfin, nous discuterons un cas spécial de surfaces plates dans la section 2.4.

2.1. Pluridifférentielles méromorphes. Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats élémentaires sur les pluridifférentielles méromorphes et leur relation avec les surfaces plates. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Boi15] pour les différentielles abéliennes et [BCGGM19] pour les k -différentielles avec $k \geq 1$.

Soit X une surface de Riemann de genre g et ω une section méromorphe du fibré canonique K_X . On notera Z les zéros et P les pôles de ω . L'intégration de ω sur $X \setminus P$ induit une structure plate sur $X \setminus P$. Chaque zéro de ω d'ordre a correspond à une singularité conique d'angle $2(a+1)\pi$ de la structure plate. Les pôles simples de ω correspondent à des demi-cylindres infini. Les pôles d'ordre $-b \leq -2$ correspondent à un revêtement de degré $b-1$ du plan dans lequel on a éventuellement fait une entaille correspondant au résidu. Inversement, une surface plate obtenue en attachant par translation un nombre fini de demi-cylindres infinis, des revêtements d'ordre $b-1$ du plan entaillé et des polygones correspond à une différentielle abélienne méromorphe sur une surface de Riemann.

Une théorie similaire a été développée dans le cas des sections méromorphes ξ de la puissance tensorielle k ème K_X^k du fibré canonique de X . En effet, on peut passer au revêtement canonique $\pi : \widehat{X} \rightarrow X$ et choisir une racine k ème $\widehat{\omega}$ de $\pi^*\xi$ sur \widehat{X} . L'intégration de $\widehat{\omega}$ le long d'un chemin de \widehat{X} nous fournit une structure plate sur \widehat{X} . La surface plate ainsi obtenue

possède une symétrie cyclique d'ordre k provenant de la structure de revêtement. Le quotient de cette surface par ce groupe est une surface plate où l'on autorise les identifications par des translations et par des rotations d'angle multiple de $\frac{2\pi}{k}$. Les pôles d'ordre $-k$ correspondent à des demi-cylindres infinis et les pôles d'ordre $-b < -k$ à un revêtement d'ordre $b - k$ d'un domaine angulaire d'angle $\frac{2\pi}{k}$. Les pôles d'ordre $0 > a > -k$ et les zéros d'ordres $a \geq 0$ correspondent aux singularités coniques d'angle $(a + k)\frac{2\pi}{k}$. Cette similitude explique la convention de langage que les singularités d'ordre $a \geq -k + 1$ sont des zéros d'ordre a de ξ .

Enfin, pour les k -différentielles non primitives, on a la propriété suivante. Si la k -différentielle ξ est la puissance d ième d'une (k/d) -différentielle η , alors pour tout pôle P

$$\text{Res}_P^k(\xi) = \left(\text{Res}_P^{k/d}(\eta)\right)^d. \quad (2.1)$$

2.2. Briques élémentaires. Dans ce paragraphe, nous introduisons des surfaces plates à bord qui nous serviront de briques pour construire les pluridifférentielles ayant les propriétés locales souhaitées.

Nous décrivons dans un premier temps les briques pour les différentielles abéliennes. Les éléments de base de nos constructions seront les *domaines basiques* introduit par [Boi15].¹ Étant donné des vecteurs (v_1, \dots, v_l) dans $(\mathbf{C}^*)^l$. Nous considérons la ligne brisée L dans \mathbf{C} donnée par la concaténation d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_- , des v_i pour i croissant et d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_+ . Nous supposons que les v_i sont tels que L ne possède pas de points d'auto-intersection.

Le *domaine basique positif* (resp. *négatif*) $D^+(v_i)$ (resp. $D^-(v_i)$) est l'adhérence de la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus L$ contenant les nombres complexes au dessus (resp. en dessous) de L . Étant donné un domaine positif $D^+(v_i)$ et un négatif $D^-(w_j)$, on construit le *domaine basique ouvert à gauche* (resp. *droite*) $D_g(v_i; w_j)$ (resp. $D_d(v_i; w_j)$) en collant par translation les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-).

On se donne maintenant des vecteurs (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$ tels que la concaténation V de ces vecteurs dans cet ordre n'a pas de points d'auto-intersection. De plus, on suppose qu'il existe deux demi-droites parallèles L_D et L_F de vecteur directeur \vec{l} , issues respectivement du point de départ D et final F de V , ne rencontrant pas V et telles que (\vec{DF}, \vec{l}) est une base positive de \mathbf{R}^2 . On définit la *partie polaire* $C(v_i)$ d'ordre 1 associé aux v_i comme le quotient du sous-ensemble de \mathbf{C} entre V et les demi-droites L_D et L_F par l'identification de L_D à L_F par translation. Le résidu du pôle simple correspondant est donné par la somme $F - D$ des v_i .

On se donne $b \geq 2$ et $\tau \in \{1, \dots, b - 1\}$. Soient $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_\ell)$ des vecteurs de \mathbf{C}^* tels que la partie réelle de leurs sommes est positive et que l'argument (pris dans $]-\pi, \pi[$) des v_i est décroissant, des w_j est croissant.² La *partie polaire d'ordre b et de type τ* associée à $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_\ell)$ est la surface plate à bord obtenue de la façon suivante. Prenons l'union disjointe de $\tau - 1$ domaines basiques ouverts à gauche associé à la suite vide, $b - \tau - 1$ domaines basiques ouverts à droite associé à la suite vide. Enfin prenons le domaine positif associé aux v_i et le domaine négatif associé aux w_j . On colle alors par translation la demi-droite inférieure du i ème domaine polaire ouvert à gauche à la demi-droite supérieure du $(i + 1)$ ème. La demi-droite inférieure du domaine $\tau - 1$ est identifiée à la demi droite de gauche du domaine positif. La demi-droite de gauche du domaine négatif est identifiée à la positive du premier domaine ouvert à gauche. On procède de même à droite. La figure 1 illustre cette construction.

Si $\sum v_i = \sum w_j$ nous dirons que cette partie polaire est *triviale*. Dans le cas contraire, nous dirons que la partie polaire est *non triviale*. Sur la figure 2, le dessin de gauche illustre une partie polaire non triviale et celui de droite une partie polaire d'ordre 1.

1. Nous mettons en garde que notre définition des domaines basiques est plus générale que celle de [Boi15].

2. Le lecteur prendra garde à la différence typographique entre l et ℓ dans l'ensemble de l'article.

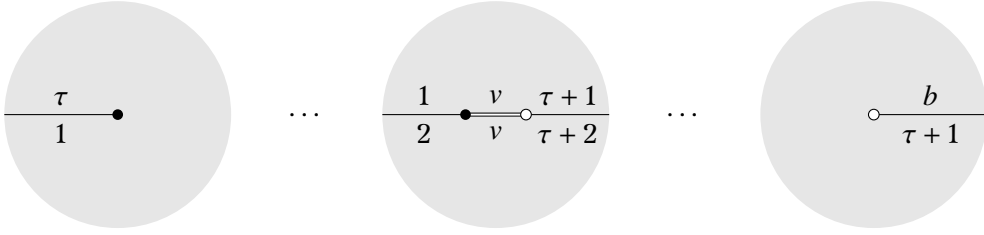


FIGURE 1. Une partie polaire d'ordre b de type τ associée à $(v; v)$.

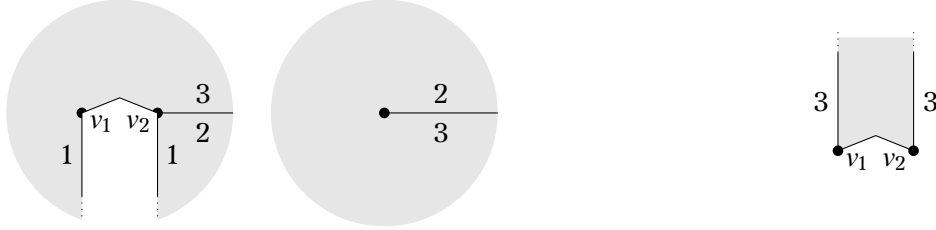


FIGURE 2. Une partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ d'ordre 3 (de type 1) à gauche et d'ordre 1 à droite.

D'après le théorème des résidus, l'intégration de ω le long d'un lacet fermé γ est égale à la somme des résidus encerclés par γ . En effet, rappelons notre convention que notre résidu est égal à $2i\pi$ fois le résidu usuel. Cela a la conséquence suivante qui, bien qu'élémentaire, est primordiale pour notre étude.

Lemme 2.1. *Soient $(v_i; w_j)$ des nombres complexes, le pôle associé à la partie polaire d'ordre b et de type τ associée à $(v_i; w_j)$ est d'ordre $-b$ et de résidu $\sum v_i - \sum w_j$.*

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine polaire d'ordre 1 associé à v_i est d'ordre -1 et possède un résidu égal à $\sum v_i$.

Nous introduisons maintenant les briques analogues pour les k -différentielles. Les constructions sont très similaires au cas abélien et nous ne donnerons pas les détails.

Étant donné $b := k\ell$ avec $\ell \geq 1$ et des vecteurs $(v_i; w_j)$ comme ci-dessus la k -partie polaire d'ordre $k\ell$ associée à $(v_i; w_j)$ coïncide avec la partie polaire d'ordre ℓ associée à $(v_i; w_j)$. Cette k -partie polaire permettra de construire des pôles d'ordre $-k\ell$ ayant pour k -résidu $(\sum v_i - \sum w_j)^k$.

Nous traitons maintenant le cas des pôles d'ordre non divisible par k . Soient $c = \ell k + r$ avec $0 < r < k$ et $\ell \geq 1$. On se donne des vecteurs v_i de \mathbf{C}^* de partie réelle positive. La k -partie polaire d'ordre c associée aux $(v_1, \dots, v_l; \emptyset)$ est donnée par la construction suivante. Nous concaténons les v_i dans le plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $-r\frac{2\pi}{k}$. Comme dans le cas des parties polaires d'ordre b , la ligne brisée ainsi formée doit être sans points d'intersection. Cette propriété sera vérifiée au cas par cas pour chacune des constructions. Nous considérons la surface au dessus de cette courbe brisée. Ensuite nous prenons $\ell - 1$ domaines basiques ouvert dans la direction de L_1 associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle $-r\frac{2\pi}{k}$ à la demi droite L_2 . Cette construction est illustrée à gauche de la figure 3.

Pour simplifier certaines constructions, il est utile de considérer la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; v_1, \dots, v_l)$. Elle est définie de manière similaire à la partie polaire précédente en considérant la surface sous la courbe brisée suivante. Nous concaténons les v_i dans le

plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $r\frac{2\pi}{k}$. La fin de cette construction est similaire à la précédente.

Nous aurons besoin dans un cas d'une construction un peu plus générale que dans le cas précédent. On note comme précédemment $c = k\ell + r$ avec $-k < r < 0$. Étant donné $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^*$ la *partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; v_1, v_2)$ de type t* avec $1 \leq t \leq \ell$ est donnée par la construction suivante. Nous concaténons v_1 avec v_2 dans le plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $r\frac{2\pi}{k}$. Nous considérons la surface au dessus de cette courbe brisée. Ensuite nous prenons $t - 1$ domaines basiques ouvert à droite associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle $-r\frac{2\pi}{k}$ à la demi droite L_2 . Puis nous coupons la surface en partant du point d'intersection entre v_1 et v_2 le long d'une demi-droite L_3 . Puis nous collons $\ell - t$ domaines basiques de manière cyclique à cette demi droite. Cette construction est illustrée à droite de la figure 3.



FIGURE 3. La 3-partie polaire associée à $(v_1; \emptyset)$ d'ordre 7 à gauche et la 6-partie polaire associée à $(\emptyset; v_2, v_3)$ d'ordre 11 et de type 1 à droite.

Nous résumons maintenant les propriétés des constructions du paragraphe précédent.

Lemme 2.2. Soient $(v_i; w_j)$ des nombres complexes, le pôle obtenu à partir de la k -partie polaire d'ordre $b = k\ell$ et de type τ associée à $(v_i; w_j)$ est d'ordre $-b$ et possède un k -résidu égal à $(\sum v_i - \sum w_j)^k$.

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine basique d'ordre k associé à v_i est d'ordre $-k$ et possède un k -résidu égal à $(\sum v_i)^k$.

2.3. Pluridifférentielles entrelacées, éclatement de zéros et couture d'anses. Dans ce paragraphe, nous rappelons certains cas particuliers des résultats obtenus dans [BCGGM18] et [BCGGM19] au sujet des différentielles entrelacées. Cela nous permet de rappeler les constructions de l'éclatement des zéros et la couture d'anse.

Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une différentielle entrelacée. Étant donnée une partition $\mu := (m_1, \dots, m_t)$ telle que $\sum_{i=1}^t m_i = k(2g - 2)$, une k -différentielle entrelacée η de type μ sur une courbe stable n -marquée (X, z_1, \dots, z_t) est une collection de k -différentielles non nulles η_v sur les composantes irréductibles X_v de X satisfaisant aux conditions suivantes.

(0) (**Annulation comme prescrit**) Chaque k -différentielle η_v est méromorphe et le support de son diviseur est inclus dans l'ensemble des nœuds et des points marqués de X_v . De plus, si un point marqué z_i se trouve sur X_v , alors $\text{ord}_{z_i} \eta_v = m_i$.

(1) (**Ordres assortis**) Pour chaque nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ à $q_2 \in X_{v_2}$,

$$\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -2k.$$

(2) (**Résidus assortis aux pôles d'ordre $-k$**) Si a un nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ avec $q_2 \in X_{v_2}$ on a $\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} = \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -k$, alors

$$\text{Res}_{q_1}^k \eta_{v_1} = (-1)^k \text{Res}_{q_2}^k \eta_{v_2}.$$

Nous aurons besoin de savoir quand une k -différentielle entrelacée est lissable seulement pour des cas très particuliers. Nous rappelons ici uniquement les cas qui nous intéressent. Le premier cas est celui où l'ordre des k -différentielles à tous les nœuds est égal à $-k$.

Lemme 2.3. Soit $\eta = \{\eta_v\}$ une k -différentielle entrelacée. Si l'ordre des k -différentielles η_v aux nœuds est $-k$, alors η est lissable localement.

Notons que dans ce cas, la notion de différentielle entrelacée correspond à la notion classique de différentielle stable. Ainsi nous pourrions nous ramener à ce résultat pour prouver les propositions 1.7 et 1.17.

Maintenant nous regardons le cas des pluridifférentielles entrelacées à deux composantes.

Lemme 2.4. Supposons que X possède exactement deux composantes X_1 et X_2 reliées par un unique nœud qui identifie $q_1 \in X_1$ à $q_2 \in X_2$. Si $\text{ord}_{q_1} \eta_1 > -k > \text{ord}_{q_2} \eta_2$, alors la k -différentielle entrelacée est lissable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k ème d'une différentielle abélienne holomorphe.

De plus, le lissage peut se faire sans modifier les k -résidus de η_1 si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k ème d'une différentielle abélienne méromorphe.

Remarquons que la deuxième partie du lemme n'est pas explicitement prouvée dans [BCGGM19]. Toutefois, cela peut se montrer sans problèmes en combinant la preuve du théorème 1.5 et le lemme 4.4 de [BCGGM19].

Maintenant, nous donnons deux applications cruciales du lemme 2.4.

Proposition 2.5 (éclatement d'un zéro). Soient (X, ξ) une k -différentielle de type μ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ un t -uplet d'entiers strictement supérieurs à $-k$ tel que $\sum_i \alpha_i = a_0$.

Il existe une opération sur (X, ξ) en z_0 qui fournit une k -différentielle (X', ξ') de type $(\alpha_0, \dots, \alpha_t, \mu \setminus \{a_0\})$ qui ne modifie pas les k -résidus de ξ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) ξ n'est pas la puissance k ème d'une différentielle abélienne méromorphe.

ii) Il existe une k -différentielle de genre zéro et de type $(\alpha_1, \dots, \alpha_t; -a_0 - 2k)$ dont le k -résidu au pôle d'ordre $-a_0 - 2k$ est nul.

De plus, si $\xi = \omega^k$ avec ω une différentielle abélienne méromorphe, alors la k -différentielle ξ' est primitive si et seulement si $\text{pgcd}(\alpha_i, d) = 1$.

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une droite projective avec une différentielle ayant les ordres souhaités. Le lemme 2.4 implique facilement la proposition 2.5. C.Q.F.D.

La seconde construction nous permettra en particulier de faire une récurrence sur le genre des surfaces de Riemann.

Proposition 2.6 (Couture d'anse). Soient (X, ξ) une k -différentielle (primitive) dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ξ . Il existe une opération locale à z_0 qui produit une k -différentielle (X', ξ') dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_{g+1}(a_0 + 2k, \mu \setminus \{a_0\})$.

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une courbe elliptique avec une différentielle de type $(a_0 + 2k; -a_0 - 2k)$. Le lemme 2.4 permet de conclure. C.Q.F.D.

2.4. Différentielle à cœur dégénéré. Les différentielles à cœur dégénéré constitue une famille particulièrement simple d'exemples. En particulier, beaucoup de problèmes géométriques se simplifient en des problèmes combinatoires. Cela nous permettra de montrer des résultats de non existence, en particulier dans la section 5.

Rappelons que le cœur d'une différentielle abélienne ou quadratique est l'enveloppe convexe des singularités coniques pour la métrique définie par la différentielle. On dit que le cœur est *dégénéré* s'il est d'intérieur vide, c'est-à-dire s'il est réduit à l'union d'un nombre fini de liens-selles.

Le complémentaire du cœur d'une surface plate admet autant de composantes connexes que de pôles. On appelle *domaine polaire* la composante à laquelle un pôle appartient. Le bord d'un domaine polaire est toujours formé par un nombre fini de liens-selles (voir le lemme 2.1 de [Tah18]).

L'intérêt de ces différentielles est donné par la proposition suivante que l'on montre aisément en utilisant le *flot contractant*.

Proposition 2.7. *Dans une strate donnée, le lieu des différentielles abéliennes ou quadratiques dont tous les résidus sont nuls est soit vide soit contient une différentielle à cœur dégénéré.*

Démonstration. Le lieu d'une strate où les résidus sont tous nuls est $GL^+(2, \mathbb{R})$ -invariant. Or, d'après le lemme 2.2 de [Tah18], chaque $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite contient une surface plate dont le cœur est dégénéré. C.Q.F.D.

On peut dans ce cas supposer que toutes les connexions de selles sont horizontales. De plus, il y a exactement $2g + n + \bar{p} - 2$ connexions de selles dans la surface S , où n est le nombre de zéros et \bar{p} le nombre de pôles dans la strate. Coupant le long de ces liens selles, nous obtenons \bar{p} (2-)parties polaires. Le *graphe d'incidence d'une surface à cœur dégénéré* est le graphe dont les sommets sont les domaines polaires et deux sommets sont reliés par autant d'arêtes qu'il y a de liens selles entre les deux domaines polaires. De plus, le *graphe d'incidence simplifié* est obtenu en enlevant tous les sommets de valence 2 au graphe d'incidence. Les sommets du graphe d'incidence qui sont de valence supérieure ou égale à trois sont dits *spéciaux*.

3. DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES MÉROMORPHES

Dans cette section, nous étudions le cas des différentielles abéliennes. Dans la section 3.1, nous traitons le cas général. Puis nous considérons dans la section 3.2 le cas où tous les résidus sont nuls dans les strates de genre zéro. Ensuite, nous traitons le cas des résidus colinéaires dans les strates de genre zéro n'ayant que des pôles simples dans la section 3.3. Enfin, nous étudions l'application résiduelle sur chaque composante connexe des strates dans la section 3.4.

3.1. Cas général. Soit $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de $2g - 2$. Dans ce paragraphe, nous prouvons la surjectivité de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ dans le cas $g \geq 1$ et dans le cas où $g = 0$ et $p, s \neq 0$. Le premier cas correspond aux théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas abélien. Le second cas est couvert par le début de la démonstration du théorème 1.5. De plus, nous montrons que si $g = 0$ et $s = 0$, alors l'image de l'application résiduelle contient $\mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Nous montrons aussi que l'image de l'application résiduelle contient les résidus non colinéaires dans le cas $g = 0$ et $p = 0$.

La preuve suit le schéma suivant. Nous traitons tout d'abord le cas des strates de genre zéro avec un unique zéro (lemme 3.1). Puis nous considérons le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro et $p = 0$ (lemme 3.2) ou $s = 0$ (lemme 3.3). Enfin nous concluons dans presque tout les cas grâce aux techniques d'éclatement du zéro (proposition 2.5) et de couture d'anse (proposition 2.6) (lemme 3.4).

Lemme 3.1. *Soit $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de -2 et $r = (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathcal{R}_0(\mu)$ un élément non nul de l'espace résiduel. Si les r_i ne sont pas colinéaires ou si $p \neq 0$, alors r est dans l'image de $\mathcal{R}_0(\mu)$*

Avant de procéder à la preuve du lemme 3.1 nous introduisons un objet géométrique associé à un uplet $v := (v_1, \dots, v_i)$ avec $v_i \neq 0$. Nous supposons, quitte à permuter les

indices, que l'argument des vecteurs v_1, \dots, v_t est décroissant dans $]-\pi, \pi]$. Le *polygone résiduel* $\mathfrak{P}(v)$ est le polygone obtenu en concaténant les vecteurs v_1, \dots, v_t dans cet ordre. Remarquons que $\mathfrak{P}(v)$ est un polygone convexe, éventuellement dégénéré (i.e. d'intérieur vide).

Preuve du lemme 3.1. Soient $\Omega\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une strate de genre zéro et $r := (r_1, \dots, r_{p+s})$ dans $\mathcal{R}_0(\mu)$. Nous notons par r^* l'ensemble des résidus non nuls.

Supposons que le polygone résiduel $\mathfrak{P}(r^*)$ est non dégénéré (i.e. que les r_i ne sont pas colinéaires). Pour tous les pôles P_i d'ordre $-b_i$ ayant un résidu non nul r_i , on prend une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$ (et de type arbitraire). Pour tous les pôles P_j d'ordre $-b_j$ ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_j associée à $(r_i; r_i)$, où $r_i \neq 0$ est le résidu (non nul) au pôle P_i . Les collages de ces parties polaires avec le polygone résiduel se font de la façon suivante.

Étant donnée une partie polaire non triviale associée à un pôle P_i . S'il existe un pôle P_j qui a une partie polaire associée à $(r_i; r_i)$, alors nous collons le segment r_i de P_i au segment r_i du domaine basique négatif de P_j . Nous continuons ces collages jusqu'à ce que il n'y ait plus de pôles sans résidu avec une partie polaire associée à $(r_i; r_i)$. Puis nous collons le dernier segment r_i au segment r_i du polygone résiduel. Nous faisons de même pour tous les pôles de résidus non nuls. Cette construction est illustrée par le dessin de la figure 4.

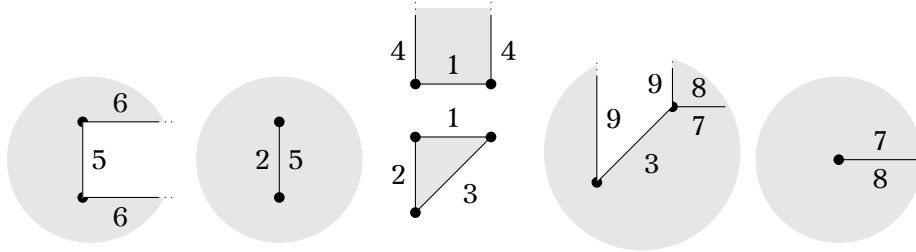


FIGURE 4. Une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(4; -2, -2, -3; -1)$ avec résidus $(0, i, -1 - i, 1)$.

La différentielle associée à cette surface plate possède clairement les invariants désirés aux pôles. Vérifions maintenant qu'elle est de genre zéro et possède un unique zéro. Remarquons que si l'on coupe cette surface le long d'une connexion de selle, on obtient deux surfaces connexes disjointes. En effet, les connexions de selles correspondent soit au bord des parties polaires, soit aux diagonales du polygone résiduel. Une telle propriété implique qu'il existe un unique zéro, car s'il y en avait deux, un lien selle entre les deux ne déconnecterait pas la surface. De manière similaire, on en déduit que le genre de la surface est nul.

Nous traitons maintenant le cas où le polygone résiduel est dégénéré mais pas réduit à un point dans les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$, avec $p \neq 0$. Sans perte de généralité, nous supposons que les résidus sont réels. De plus, nous ordonnons les indices de telle sorte que l'ensemble des résidus non nuls $r^* = \{r_{j_1}, \dots, r_{j_t}\}$ satisfait $r_{j_i} < 0$ pour $i \leq u$ et r_{j_i} pour $u < i \leq t$. Nous notons $J = \{j_1, \dots, j_t\}$. Prenons le pôle P_1 d'ordre $-b_1$. Si $r_1 = 0$, nous associons à ce pôle une partie polaire d'ordre b_1 associée aux vecteurs $(-r_{j_1}, \dots, -r_{j_u}; r_{j_{u+1}}, \dots, r_{j_t})$. Si $r_1 \neq 0$, on suppose que $r_1 = r_{j_1}$ et on associe à ce pôle une partie polaire d'ordre b_1 associée aux vecteurs $(-r_{j_2}, \dots, -r_{j_u}; r_{j_{u+1}}, \dots, r_{j_t})$. Nous associons aux pôles P_{j_i} , pour $1 \leq i \leq u$ si $1 \notin J$ et $2 \leq i \leq u$ si $1 \in J$, une partie polaire d'ordre b_{j_i} associée à $(\emptyset; -r_{j_i})$. Pour les $u < i \leq t$ nous prenons une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Pour tous les pôles P_k d'ordre $-b_k$ ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_k associée à $(\pm r_{i_k}; \pm r_{i_k})$ avec $i_k \in J \setminus \{1\}$. On colle les parties polaires triviales comme expliqué au paragraphe précédent. On obtient une union de surfaces plates à bord. Il reste à coller les bords restant aux segments

de la partie polaire de P_1 . On vérifie comme au paragraphe précédent que la différentielle ainsi construite vérifie les propriétés désirées. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de genre 1 avec telles que $p = 0$ ou $s = 0$.

Lemme 3.2. *L'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(s; (-1^s))$ est surjective pour $s > 1$.*

Démonstration. Considérons la strate $\Omega\mathcal{M}_1(s; (-1^s))$, avec $s > 1$ et $r := (r_1, \dots, r_s)$ dans $\mathcal{R}_1(s; (-1^s))$. Prenons un tore plat S_1 tel que le lien selle le plus petit est strictement supérieur à $\sum |r_i|$. Nous enlevons de S_1 le polygone résiduel $\mathfrak{P}(-r)$. Cette opération est réalisable par notre hypothèse sur la longueur des liens selles de S_1 . Pour chacun des pôles P_i , nous prenons une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Nous collons le bord de ces parties polaires au bord de $S_1 \setminus \mathfrak{P}(r)$ par translation. La construction est représentée par le dessin de gauche de la figure 5. On vérifie sans problème que la surface ainsi obtenue est de genre 1 et possède une unique singularité conique.

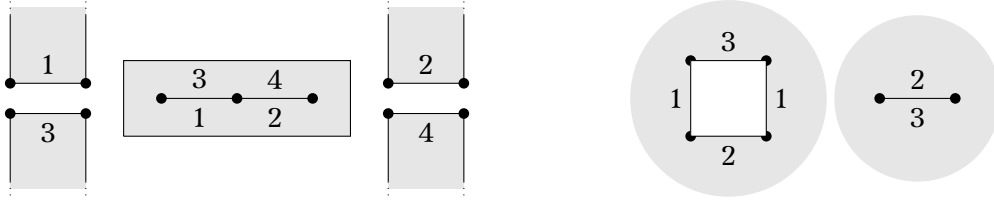


FIGURE 5. Une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_1(4; (-1^4))$ avec résidus $(1, 1, -1, -1)$ à gauche et de $\Omega\mathcal{M}_1(4; (-2^2))$ avec résidus $(0, 0)$ à droite.

C.Q.F.D.

Lemme 3.3. *L'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ est surjective.*

Démonstration. Supposons que $r = (0, \dots, 0)$. Pour tout P_i avec $i \geq 2$, nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour le pôle P_1 , nous prenons une partie polaire d'ordre b_1 associée à $(i, 1; 1, i)$. Nous collons les deux segments de période i par translation. Les autres segments sont collés cycliquement les uns aux autres. Plus précisément, nous collons le segment supérieur de P_i au segment inférieur de P_{i+1} (où ces indices sont pris modulo p). La construction est représentée par le dessin de droite de la figure 5. La surface plate obtenue a clairement une unique singularité conique. Le genre est 1 car nous pouvons couper les liens selles correspondant aux segments de période 1 et i de P_1 sans déconnecter la surface. En revanche couper un autre lien selle déconnecte la surface. Donc nous avons construit une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ dont tous les résidus aux pôles sont nuls.

Supposons maintenant que $r \neq (0, \dots, 0)$. Par le lemme 3.1, il existe une différentielle ω dans $\Omega\mathcal{M}_0(a - 2; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les résidus sont r . La différentielle souhaitée est alors donné en éclatant le zéro de la différentielle ω . C.Q.F.D.

Nous concluons maintenant à la surjectivité de l'application résiduelle pour la majorité des strates. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant.

Lemme 3.4. *Soit $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une strate telle que, soit le genre g est supérieur ou égale à 1, soit $p \neq 0$ et $s \neq 0$. L'application résiduelle de cette strate est surjective.*

De plus, si $g = 0$ et $s = 0$, alors l'image de l'application résiduelle contient $\mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{0\}$.

Démonstration. On se donne une partition $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de -2 telle que $p \neq 0$ et $s \neq 0$. Soit $r \in \mathcal{R}_0(\mu)$, alors par le lemme 3.1, il existe une différentielle (X, ω) dans $\Omega\mathcal{M}_0(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ dont les résidus aux pôles sont r . L'éclatement du zéro

d'ordre $\sum a_i$ (voir la proposition 2.5) donne une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ dont les résidus sont r .

Prenons maintenant une strate $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ avec $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ et $r \in \mathcal{R}_1(\mu)$. Si p et s sont non nuls, alors il existe une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(a-2; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ dont les résidus sont r . Par la couture d'anse (proposition 2.6), on obtient une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ ayant pour résidus r . La surjectivité de l'application résiduelle dans les cas où $p = 0$ ou $s = 0$ a été montrée dans les lemmes 3.2 et 3.3.

Considérons maintenant les partitions $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g - 2$ avec $g \geq 2$. On se donne un uplet r dans $\mathcal{R}_g(\mu)$. La strate $\Omega\mathcal{M}_1(a - 2g; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ contient une différentielle dont les résidus sont r . Par coutures d'anse successives, on obtient une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ dont les résidus sont r .

Enfin, considérons une partition quelconque $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g - 2$ avec $g \geq 1$. L'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ est surjective. La surjectivité de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_g(\mu)$ est obtenue par éclatement du zéro des différentielles de cette strate. C.Q.F.D.

3.2. Genre zéro et les résidus sont nuls. Nous complétons la preuve des cas i) et iii) du théorème 1.5. Au vu du lemme 3.4, il reste à montrer le résultat suivant.

Lemme 3.5. *L'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ contient l'origine $(0, \dots, 0)$ si et seulement si la condition (1.5) est satisfaite.*

Rappelons que cette condition dit que l'ordre d'un zéro d'une différentielle de genre zéro dont tous les résidus sont nuls est inférieur ou égal à $\sum_{j=1}^p b_j - (p + 1)$.

Démonstration. Nous commençons par montrer la nécessité de (1.5). Soit (\mathbb{P}^1, ω) une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les résidus aux pôles sont nuls et S la surface plate associée. Nous pouvons supposer que la surface S possède un cœur dégénéré (cf proposition 2.7) et des liens selles horizontaux. Coupons S le long de ces liens selles et de toutes les demi-droites horizontales issues des singularités. On obtient alors une union disjointe de demi-plan positifs et négatifs. De plus, remarquons que chaque pôle d'ordre $-b_j$ est associé à $b_j - 1$ demi-plan positifs et $b_j - 1$ demi-plan négatifs.

Considérons une singularité conique, disons z_1 d'angle $2\pi(a_1 + 1)$. Comme les résidus aux pôles sont nuls, on obtient directement du théorème des résidus que tout chemin fermé de S possède une période nulle. Cela implique que les points correspondant à z_1 peuvent apparaître au plus une fois par demi-plan. Comme l'angle à chaque sommet dans chaque demi plan est π l'angle maximal de la singularité conique z_1 est $2\pi \sum_{j=1}^p (b_j - 1)$. Cela est équivalent au fait que l'ordre a_1 de z_1 est inférieur ou égal à $\sum_{j=1}^p b_j - (p + 1)$.

Nous montrons maintenant que la condition (1.5) est suffisante. Supposons que la condition (1.5) soit satisfaite. Considérons tout d'abord les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ ayant deux zéros avec $p - 1 \leq a_1, a_2 \leq \sum b_j - (p + 1)$. Pour tous les pôles nous prenons une partie polaire triviale S_i d'ordre b_i et de type τ_i associée à $(1; 1)$. Nous choisissons les τ_i tels que $\sum_i \tau_i = a_1 + 1$. Ce choix est possible car pour chaque i l'inégalité $1 \leq \tau_i \leq b_i - 1$ implique en sommant sur les pôles que $p \leq \sum_i \tau_i \leq \sum b_j - p$.

Ensuite, nous collons les bords des parties polaires de manière cyclique. Plus précisément, nous collons le segment supérieur de S_i au segment inférieur de S_{i+1} modulo p . Une telle construction est représentée sur la figure 6. La surface plate ainsi obtenue possède deux singularités coniques et est de genre nul. De plus, l'angle de la singularité conique à gauche des liens selles est d'angle $2\pi \sum \tau_i$. La différentielle ainsi construite appartient à la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ et n'a pas de résidus aux pôles.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$, avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Il y a deux cas à considérer suivant que $a_1 + a_2 > \sum b_j - p - 1$ ou non.

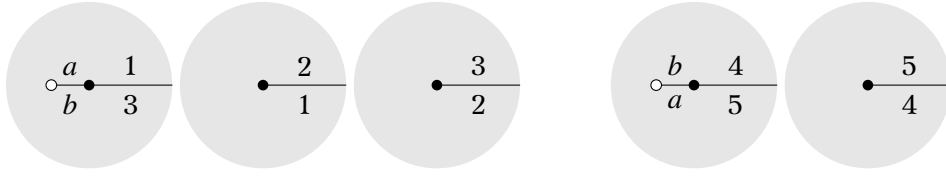


FIGURE 6. Une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(4, 1; -3, -4)$ avec résidus nuls

Si $a_1 + a_2 \leq \sum b_i - p - 1$ (et donc $p - 1 \leq a_3 \leq \sum b_i - p - 1$), alors il existe une différentielle à résidus nuls dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1 + a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$. Donc en cassant le zéro d'ordre $a_1 + a_2$ en deux zéros d'ordres a_1 et a_2 par la proposition 2.5, nous obtenons la différentielle souhaitée.

Supposons maintenant que $a_1 + a_2 > \sum b_i - p - 1$ (ou de manière équivalente $a_3 < p - 1$). Remarquons que $a_1, a_3 \leq a_3$ et $a_1 + a_2 + a_3 = b - 2$ impliquent que $a_1, a_2 \leq \frac{b-2}{3}$, avec $b := \sum b_i$. Nous obtenons que $3p > b + 1$, ce qui implique que l'un des pôles est d'ordre -2 .

Nous donnons maintenant la description d'une différentielle ayant les propriétés attendues. Cette construction est illustrée dans la figure 7 dans le cas de $\Omega\mathcal{M}_0(3^3, -2^4, -3)$. Dans un premier temps, nous décrivons le procédé, puis nous ajusterons les constantes pour obtenir les singularités coniques souhaitées.

Pour le pôle d'ordre -2 , prenons une partie polaire triviale d'ordre 2 associée à $(v_1, v_2; v_3)$ avec $v_3 = v_1 + v_2$. Pour chaque pôle P_i nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i de type τ_i associée à $(v_{j_i}; v_{j_i})$ pour un $j_i \in \{1, 2, 3\}$. Puis nous collons le segment v_{j_i} du triangle au segment v_{j_i} correspondant au domaine basique négatif de cette partie polaire. Cette opération ajoute une contribution angulaire de $2\pi\tau_i$ et $2\pi(b_i - \tau_i)$ aux singularités coniques correspondant aux sommets du segment v_{j_i} . Nous faisons de même pour tous les pôles jusqu'à obtenir une surface plate S_1 dont le bord est composé des trois segments v_j . Nous prenons maintenant le triangle $v_1v_2v_3$ et collons par translation ses trois arêtes au bord de S_1 . La surface plate ainsi obtenue est de genre zéro, possède trois zéros distincts et n'a pas de résidus aux pôles.

Il reste à ajuster le choix des segments v_{j_i} et des types τ_i pour chaque pôle afin d'obtenir les angles souhaités. La remarque clé est que chaque pôle P_i contribue à exactement deux singularités coniques et que la contribution à chacune d'elles est d'angle compris entre 2π et $2\pi(b_i - 1)$. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors la construction précédente permet de construire la différentielle souhaitée.

La situation peut donc être modélisée par un graphe biparti Γ dont trois sommets A_i représentent les trois sommets du triangle $v_1v_2v_3$ et $p - 1$ autres sommets B_i représentent les pôles P_i distincts du pôle avec la partie polaire associée au triangle. Il y a une arête entre les sommets B_i et A_j pour chaque multiple de 2π de la contribution de P_i à la singularité conique A_j . Un exemple est schématisé dans la figure 7.

Il suffit de montrer qu'il est possible de distribuer les arêtes de telle façon que les sommets B_i soient de valence b_i , connectés à précisément deux sommets A_j , et que la valence de A_j soit a_j . Une telle distribution peut être obtenue de la façon suivante. Rappelons que le plus grand zéro (que nous supposons être z_3) est d'ordre $a_3 \leq p - 1$. Nous partons du graphe où tous les sommets B_i sont connectés à A_1 par exactement une arête et toutes les autres arêtes connectent A_2 . Prenons un sommet B_i quelconque. Il y a $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_2 . Si la valence de A_2 moins $b_i - 1$ est supérieure ou égale à a_2 , alors nous remplaçons les $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_2 par $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_3 . Nous recommençons alors cette opération jusqu'à l'indice i_0 tel que la valence de A_2 moins $b_{i_0} - 1$ soit strictement inférieure à a_2 . Dans ce cas, nous remplaçons des arêtes entre B_{i_0} et A_2 par des arêtes entre B_{i_0} et A_3 , de telle façon que la valence de A_2 soit égale à a_2 . Le sommet B_{i_0} est alors connecté aux trois sommets A_j . Donc nous enlevons l'arête entre A_1 et B_{i_0} pour la mettre entre A_3 et B_{i_0} .

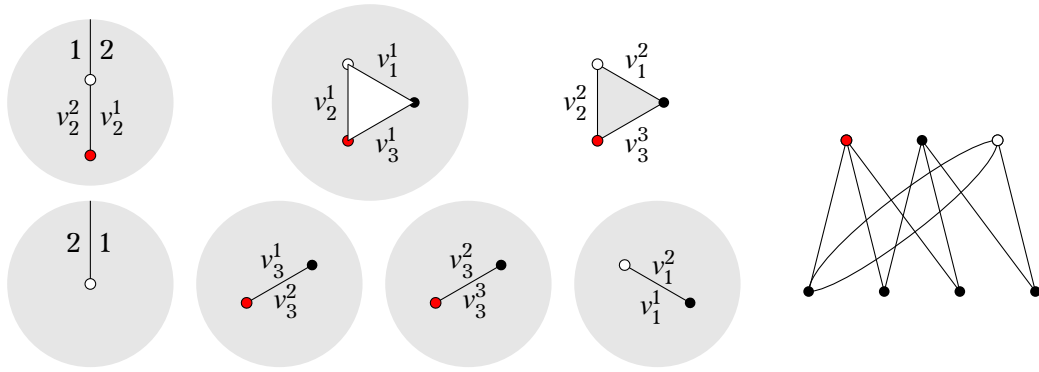


FIGURE 7. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0((3)^3; (-2)^4, -3)$ avec résidus nuls et son graphe Γ .

Comme a_1 est strictement plus petit que $p - 1$, cette opération est toujours possible. Pour terminer, nous remplaçons autant d'arêtes que nécessaire entre A_1 et les B_j pour $j > i_0$ pour les connecter à A_3 afin que la valence de A_1 soit a_1 . Notons qu'il existe toujours assez d'arêtes entre A_1 et les B_j pour obtenir la valence a_3 à A_3 car il y a un total de $p - 1$ sommets B_i et $a_3 \leq p - 1$.

Pour conclure le cas des différentielles de genre zéro avec des résidus nuls, nous considérons les strates ayant $n \geq 4$ zéros. Soient a_1 et a_2 les zéros de plus petits ordres. En notant $b = \sum_i b_i$ on a

$$a_1 + a_2 \leq \frac{2}{n}(b - 2) \leq \sum_i (b_i - 1) - 1 \leq b - p - 1,$$

où la deuxième égalité s'obtient en remarquant que $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $b_i \geq 2$ impliquent que $\frac{2b_i}{n} \leq b_i - 1$. Donc le cas $n \geq 4$ s'obtient en éclatant un zéro d'une différentielle ayant $n - 1$ zéros d'ordres $a_1 + a_2$, a_i pour $i \geq 3$ et p pôles d'ordres $-b_j$. C.Q.F.D.

3.3. Genre zéro avec pôles simples. Dans cette section nous nous intéressons au cas des différentielles en genre zéro n'ayant que des pôles simples. Nous prouvons les propositions 1.6 et 1.7. De plus nous montrons que les uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle sont en nombre fini pour chaque strate (à multiplication par un facteur complexe près).

Nous considérons d'abord le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Afin de se familiariser avec les éléments de cette preuve, le lecteur peut consulter l'exemple 3.7.

Preuve de la proposition 1.6. Supposons que les éléments du s -uplet $r := (r_1, \dots, r_s)$ ne soient pas colinéaires. Dans ce cas, le polygone résiduel $\mathfrak{P}(r)$ (introduit au début du paragraphe 3.1) est un polygone convexe non dégénéré. On obtient alors la différentielle souhaitée en collant des demi-cylindres infinis aux arêtes de ce polygone.

Supposons maintenant que les r_i soient colinéaires et qu'il existe un graphe Γ associé à r qui soit un graphe de connexion. On construit une différentielle de la façon suivante. Pour chaque résidu r_i on prend une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Considérons une feuille de Γ . On peut coller le segment au bord de la partie polaire correspondante au segment au bord de la partie polaire correspondante à l'autre sommet de l'arête. Puis on enlève la feuille du graphe et le poids de cette feuille à l'autre sommet. On recommence cette procédure pour une feuille du nouveau graphe. Cette opération est faite de manière inductive jusqu'à ce que le graphe soit réduit à un sommet.

Nous justifions maintenant que cette opération est toujours possible. Supposons tout d'abord que le graphe possède strictement plus de deux sommets. Comme le poids d'une feuille est toujours strictement plus petit que le poids du sommet auquel elle est reliée

(point (ii)), le collage est toujours possible. Enfin le fait que la différence des poids est nulle (point (i)), implique que la surface obtenue est sans bord. On vérifiera facilement que cette surface plate est de genre zéro et possède un unique zéro. La surface est de genre zéro car s'il existait un lacet fermé homotopiquement non trivial, cela impliquerait un chemin fermé sur le graphe de connexion. Or celui-ci est un arbre. L'arbre étant connexe, la surface l'est également. Il reste à montrer que les extrémités des liens selles constituent une unique singularité conique. En tant que graphe plongé dans la surface, le graphe des liens-selles est dual de celui défini par le graphe de connexions avec des arcs reliant les pôles. Le graphe de connexions étant un arbre, il ne définit qu'une seule face. Par conséquent, le graphe des liens-selles n'a qu'un seul sommet.

Supposons maintenant qu'il existe une différentielle ω dans $\Omega\mathcal{M}_0(s-2;(-1^s))$ dont les résidus sont (r_1, \dots, r_s) . Supposons que les résidus soient colinéaires, nous les supposons réels sans perte de généralité. Nous construisons un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexions. Les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont associés aux pôles de ω dont le résidu est positif (resp. négatif). Les poids sont les valeurs absolues des résidus. Enfin deux sommets sont connectés si et seulement si le bord de leurs domaines polaires respectifs contiennent un même lien-selle.

Le fait que ω soit de genre zéro et ne possède qu'un zéro implique clairement que ce graphe biparti est un arbre. Le théorème des résidus implique directement que la différence des poids est nulle (point (i)). Regardons maintenant l'effet de l'opération qui enlève une feuille au graphe de connexions (dans le cas où il possède au moins deux arêtes). Cette opération revient à couper la différentielle ω le long d'un lien selle v dont l'un des côtés est un unique domaine polaire. De plus, le domaine polaire adjacent à ce lien selle est remplacé par le domaine polaire associé aux vecteurs précédents privés de v (qui est un ensemble non vide car ω est non singulière). Les autres domaines polaires et les identifications restent les mêmes. À chaque étape, cette opération produit une différentielle de genre zéro avec un unique zéro et des pôles simples dont tous les résidus sont non nuls. Cela implique clairement le point (ii) des graphes de connexions. C.Q.F.D.

Avant d'étudier le cas des strates avec plus de zéros, nous montrons que les s -uplets qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(s-2;(-1^s))$ sont en nombre fini et que ceux-ci sont commensurables entre eux.

Proposition 3.6. *Soient $r := (x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j réels strictement positifs. Si le s -uplet r n'appartient pas à l'image de $\mathfrak{R}_0(s-2;(-1^s))$, alors les x_i et y_j sont commensurables entre eux. De plus, si les x_i et y_j sont entiers et premiers entre eux, alors :*

$$\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \frac{s_1 s_2}{2}. \quad (3.1)$$

En particulier, il n'y a, à homothétie près, qu'un nombre fini de s -uplets qui ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(s-2;(-1^s))$.

Démonstration. Nous procédons à une démonstration par récurrence. Si on a $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, toutes les configurations de résidus sont réalisables. Si $s_1 = s_2 = 2$, les seuls uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle sont proportionnels à $(1, 1, -1, -1)$.

À présent, on suppose que la proposition est démontrée pour tous les couples (s_1, s_2) tels que $s_1 \leq a$, $s_2 \leq b$ et au moins l'une des inégalités est stricte. Nous considérons un uplet qui n'est pas dans l'image avec s_1 nombres positifs et s_2 négatifs. Il y a deux possibilités. La première est que tous les x_i et y_j soient égaux. Auquel cas on a $s_1 = s_2$ et le uplet est proportionnel à $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. Les résidus sont commensurables et la somme des résidus d'une même série respecte la borne de l'équation (3.1).

La seconde possibilité est qu'il existe deux résidus, disons x_{s_1} et $-y_{s_2}$, tels que $y_{s_2} < x_{s_1}$. Le $(s-1)$ -uplet obtenu en retirant le résidu $-y_{s_2}$ et en remplaçant x_{s_1} par $x_{s_1} - y_{s_2}$ n'est pas

réalisable. En effet, si ce nouveau uplet était réalisable, il existerait un graphe de connexions qui lui serait associé. Il suffirait d'ajouter à ce graphe une branche avec comme poids y_{s_2} au sommet de poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ et de remplacer le poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ par x_{s_1} . Ce graphe serait un graphe de connexions pour la configuration initiale, ce qui est absurde.

Ainsi, quitte à changer les signes, tout s -uplet non réalisable avec a résidus positifs et b négatifs s'obtient à partir d'un $s - 1$ -uplet non réalisable $(x_1, \dots, x_a, -y_1, \dots, -y_{b-1})$ auquel on ajoute un résidu y_b et on remplace un résidu x_i par $x_i + y_b$. On peut supposer, quitte à changer l'ordre que $i = a$ et on note $x'_a := x_a + y_b$. On cherche donc pour quelles valeurs de y_b le s -uplet $(x_1, \dots, x'_a, -y_1, \dots, -y_b)$ est non réalisable. Par hypothèse de récurrence, on normalise ces nombres de telle sorte que les x_i et les y_j avec $j \neq b$ soient des entiers premiers entre eux. Si y_b n'était pas un entier, alors ces résidus seraient dans l'image. En effet, un graphe de connexions serait obtenu de la façon suivante. On permute y_1 et y_b . On prend s_1 sommets en haut et s_2 sommets en bas. Le sommet i_0 en haut est relié au sommet j_0 en bas si et seulement si pour $J = j_0$ ou $J = j_0 + 1$, on a

$$\sum_{i \leq i_0 - 1} x_i \leq \sum_{j \leq J} y_j \leq \sum_{i \leq i_0} x_i.$$

Les poids des sommets sont évidemment donnés par les y_j , les x_i pour $i < a$ et x'_a pour $i = s_1$. Par conséquent, pour obtenir une configuration non réalisable, il est nécessaire que y_b soit un entier. En effet, dans le cas contraire, les sommes partielles ne peuvent pas coïncider car l'une des familles de sommes partielles n'est pas constituée d'entiers et donc l'opération consistant à retirer une feuille au graphe peut toujours s'effectuer. Nous avons donc démontré par récurrence que les éléments des s -uplets non réalisables sont commensurables entre eux.

On montre maintenant la borne donnée par l'équation (3.1). On travaille à nouveau avec le s -uplet défini par $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$. Si les résidus sont tous égaux, la borne est clairement satisfaite. Sinon, il y a un élément x_i strictement plus grand qu'un élément y_j . On suppose que $i = s_1$ et $j = s_2$ et que $y_{s_2} \leq y_j$ pour tout $j \leq s_2$. En enlevant le résidu $-y_{s_2}$ et en l'ajoutant à x_{s_1} , on obtient une nouvelle configuration non réalisable. D'après l'hypothèse de récurrence, elle vérifie la borne donnée par l'équation (3.1) avec $s_2 - 1$ termes. Comme y_{s_2} est inférieur ou égal aux autres y_j , on a

$$\sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \frac{s_2}{s_2 - 1} \cdot \sum_{j=1}^{s_2 - 1} y_j \leq \frac{s_2}{s_2 - 1} \cdot \frac{s_1 \cdot (s_2 - 1)}{2} \leq \frac{s_1 \cdot s_2}{2}.$$

Ceci démontre par récurrence la borne de l'équation (3.1).

Enfin, tous les résidus non réalisables sont proportionnels à un s -uplet formé de nombres entiers inférieurs ou égaux à la borne de l'équation (3.1). Comme celle-ci ne dépend que du nombre de pôles, les droites complexes n'appartenant pas à l'image de l'application résiduelle d'une strate donnée sont en nombre fini. C.Q.F.D.

Nous illustrons maintenant les concepts introduits dans un exemple.

Exemple 3.7. Nous illustrons tout d'abord la correspondance entre une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1^7))$ et le graphe de connexion associé. La figure 8 montre que l'image de l'application résiduelle de cette strate contient les résidus $(3, (1^3), (-2^3))$.

Nous montrons maintenant que l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s - 2; (-1^s))$ n'est pas surjective dès que $s \geq 4$. En effet, soit $r := (r_1, \dots, r_s)$ des nombres entiers dans $\mathcal{R}_0(s - 2; (-1^s))$. Notons r_+ la somme des nombres positifs. Si les nombres ℓ_+ et ℓ_- de r_i égaux respectivement à 1 et -1 sont supérieurs ou égaux à $r_+/2$, alors r n'est pas dans l'image de l'application résiduelle de cette strate. En effet, considérons un graphe Γ associé à r . Comme $\ell_{\pm} \geq r_+/2$ il existe une arête de Γ connectant un sommet de poids 1 à un sommet de poids -1 . Donc le point (ii) de la définition des graphes de connexions n'est jamais satisfait.

Nous passons maintenant au cas des strates ayant plus de deux zéros.

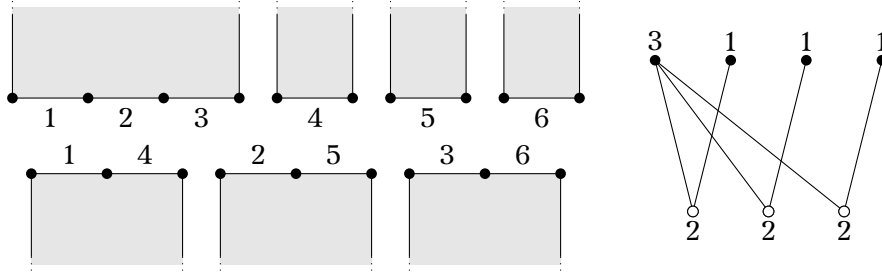


FIGURE 8. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1^7))$ avec résidus $(3, (1^3), (-2^3))$ et son graphe de connexions.

Preuve de la proposition 1.7. Soient $\mu := (a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une partition de -2 avec $n \geq 2$ et $r := (r_1, \dots, r_s) \in \mathcal{R}_0(\mu)$. Supposons que r soit dans l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$. Montrons l'existence d'une différentielle stable vérifiant les conditions de la proposition 1.7. Soit ω une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant pour résidus r . Quitte à perturber ω sans changer les résidus, on peut supposer qu'il n'existe pas de liens de selles horizontaux entre deux singularités coniques distinctes. En effet, le lieu de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ où les résidus sont r est une variété orbifold de dimension $n - 1$ munie d'un atlas où les coordonnées sont les périodes des cycles de l'homologie relative (voir [BCGGM19]). Comme tous les résidus sont réels, toute demi-droite horizontale issue d'une singularité conique heurte cette même singularité en temps fini. Coupons la surface plate associée à ω le long de ces connexions de selles. On obtient une union disjointe de cylindres et de demi-cylindres infinis.

La hauteur des cylindres d'aire finie peut être choisie arbitrairement sans changer la strate et les résidus. En faisant tendre toutes les hauteurs de ces cylindres vers l'infini, on obtient une différentielle stable. De plus, comme chaque zéro est relié à un autre par un cylindre, il y a précisément un zéro sur chaque composante irréductible de cette différentielle.

L'autre implication est claire : une différentielle dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant les résidus r est donnée par le lissage de la différentielle stable comme expliqué au lemme 2.3. C.Q.F.D.

On donne une conséquence intéressante de ce résultat.

Corollaire 3.8. *Les résidus $((1^{s+1}), (-1^{s+1}))$ n'appartiennent pas à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^{2s+2}))$ où $s \geq 1$ et $a_1 > \frac{1}{2}(3s - 1)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle ayant ces invariants locaux. Notons (X, ω) la différentielle stable donnée par la proposition 1.7. Considérons la composante X_1 qui contient le zéro d'ordre a_1 . Soient r_- et r_+ les nombres de résidus égaux respectivement à 1 et à -1 aux nœuds de X_1 . L'inégalité $a_1 > \frac{1}{2}(3s - 1)$ implique que r_- et r_+ sont supérieurs ou égaux à la moitié de la somme des résidus positifs de X_1 . Or, ces résidus ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle comme montré dans l'exemple 3.7. C.Q.F.D.

L'existence de telles différentielles entrelacées peut se reformuler dans le langage des graphes. Nous donnons maintenant une telle description puis illustrons ces constructions dans quelques exemples.

Définition 3.9. Soient $\mu := (a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une partition de -2 et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ dans $\mathcal{R}_0(\mu)$. Un *graphe déliant* G de type μ et de poids λ est un arbre muni de marquages aux sommets et de pondérations aux demi-arêtes de la façon suivante.

- 1) G a n sommets T_1, \dots, T_n .
- 2) Il y a s marquages aux sommets de poids respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.
- 3) Les demi-arêtes $A_{i,1}, A_{i,2}$ formant une arête ont pour poids Λ_i et $-\Lambda_i$ avec $\Lambda_i \neq 0$.

De plus, les relations suivantes sont vérifiées.

- i) La somme du nombre de marquages et de la valence est $a_i + 2$.
- ii) La somme des poids des marquages et du poids des demi-arêtes contenant T_i est nul.
- iii) Le uplet formé des poids des marquages et du poids des demi-arêtes appartient à l'image de $\mathfrak{R}_0(a_i; (-1^{a_i+2}))$.

Lemme 3.10. *Soit $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et n zéros, alors les résidus (r_1, \dots, r_s) sont dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si il existe un graphe déliant de type $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ et de poids (r_1, \dots, r_s) .*

Démonstration. On part d'une différentielle entrelacée (X, ω) donnée par la proposition 1.7. Le graphe G est donné par le graphe dual de X . Les marquages correspondent aux pôles et les poids sont les résidus associés. Ce graphe vérifie les trois conditions d'un graphe déliant. Par exemple, la formule de Gauss-Bonnet appliquée à une composante irréductible de X s'écrit $a_i - v_i - \lambda_i = -2$ (où v_i est la valence du sommet correspondant) et nous donne la condition (i) de la définition 3.9.

Réciproquement, étant donné un graphe déliant, on peut former une différentielle entrelacée en associant à chaque sommet une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu_i)$ où le résidu aux pôles est donné par le poids au marquage ou à la demi-arête. Le fait que cette différentielle entrelacée est lissable est une conséquence directe du lemme 2.3. C.Q.F.D.

Exemple 3.11. Dans cet exemple, nous donnons des graphes déliant de types $(1, 3; (-1^6))$ et $(2, 2; (-1^6))$ pour les résidus $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$. Tout d'abord on peut remarquer que ces résidus ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(4; (-1^6))$. Ces graphes et les surfaces plates correspondantes sont représentés dans la figure 9.

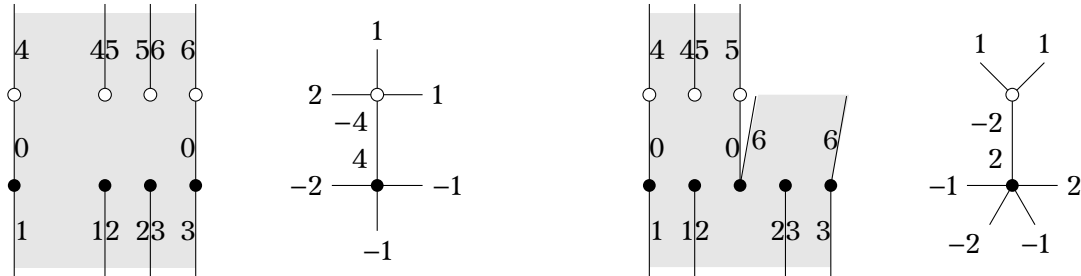


FIGURE 9. Différentielles dans $\Omega\mathcal{M}_0(2, 2; (-1^6))$ et $\Omega\mathcal{M}_0(1, 3; (-1^6))$ avec résidus $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$ et leurs graphes déliant.

3.4. Composantes connexes. Les strates sont en général non connexes et leur composantes connexes ont été classifiées par Boissy dans les théorèmes 1.1 et 2.2 de [Boi15]. Il est naturel de se demander si l'application résiduelle est surjective pour chaque composante connexe. Comme les strates sont connexes en genre zéro, la question se pose pour $g \geq 1$. Dans cette section nous prouvons la surjectivité de l'application résiduelle restreinte à chaque composante connexe.

La clé de la preuve est le fait que chaque composante connexe de la strate minimale peut s'obtenir à partir des strates minimales de genre zéro en cousant des anses (voir proposition 6.1 de [Boi15]). Cela nous permettra de restreindre notre étude au cas où tous les résidus sont nuls en genre un. C'est pourquoi nous nous contentons de rappeler la classification de Boissy dans ce cas.

En genre un, les composantes connexes des strates sont caractérisées par le nombre de rotation $\text{rot}(S)$ des surfaces plates. Pour une surface plate S définie par une différentielle

méromorphe de $\Omega\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec une base symplectique de lacets lisses de l'homologie (α, β) le nombre de rotation est

$$\text{rot}(S) := \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p, \text{Ind}(\gamma), \text{Ind}(\delta)).$$

On a le résultat suivant dû à Boissy.

- (i) Si $n = p = 1$, la strate est $\Omega\mathcal{M}_1(a; -a)$ avec $a \geq 2$ et chaque composante connexe correspond à un nombre de rotation qui est un diviseur strict de a .
- (ii) Sinon, il existe une composante connexe correspondant à chaque nombre de rotation qui est un diviseur de $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$.

Nous montrons maintenant la surjectivité de l'application résiduelle restreinte à chaque composante connexe de genre supérieur ou égal à un.

Preuve de la proposition 1.3. Il suffit de traiter le cas des strates minimales (avec un seul zéro). En effet, l'éclatement des zéros ne modifie pas les résidus aux pôles. De plus, cette opération permet d'atteindre toutes les composantes connexes à partir des strates minimales (voir la proposition 7.1 de [Boi15]). À partir de maintenant, nous considérons les strates minimales. La proposition 6.1 de [Boi15] montre que chaque composante connexe d'une strate de genre $g \geq 1$ peut être obtenue par l'ajout d'une anse à une surface de genre $g - 1$. Comme la couture d'anse est une opération locale, si l'application résiduelle est surjective en genre g , elle l'est aussi pour tous les genres supérieurs ou égaux à g . Ainsi, il suffit de prouver la proposition pour les strates minimales de genre un.

En genre un, les strates ayant des pôles simples sont connexes. Nous supposons donc que les strates ne paramètrent que des différentielles avec des pôles d'ordres inférieurs ou égaux à -2 . La proposition est trivialement vraie lorsqu'il y a un unique pôle, donc on considérera $p \geq 2$ dans tout ce qui suit. Dans ce cas, le théorème 1.5 implique que la couture d'anse à partir des strates de genre zéro permet d'obtenir une différentielle dont les résidus sont $(r_1, \dots, r_p) \in \mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Dans la suite, nous construisons dans chaque composante connexe des strates $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ une différentielle dont tous les résidus sont nuls.

Nous considérons la construction suivante. Pour tous les pôles, nous prenons une partie polaire de type b_i associée aux vecteurs $(1; 1)$. On colle le bord supérieur de P_i au bord inférieur de P_{i+1} . Il reste deux liens-selles homologues que l'on relie par un cylindre. La surface obtenue possède les invariants locaux souhaités.

Une base de l'homologie est donnée par une géodésique périodique α du cylindre (donc d'indice zéro) et le lacet β suivant. Il coupe α dans le cylindre puis le lien selle au bord du domaine polaire P_p , puis tourne à gauche avant de ressortir de ce domaine polaire en coupant l'autre lien selle et ainsi de suite. Remarquons que changer le type τ d'une partie polaire change d'autant l'indice de β . On peut donc obtenir pour β tous les indices dans $J = [p, -p + \sum_{i=1}^p b_i]$. À moins que la totalité des pôles ne soient d'ordre -2 , on obtient ainsi toutes les composantes connexes de la strate. En effet, si $\mu = (a; -3, -2, \dots, -2)$, alors la strate est connexe. Il suffit donc de montrer que la longueur de l'intervalle J est supérieur ou égale à $\min_i b_i$, si $(b_1, \dots, b_p) \neq (2, \dots, 2)$ et $(b_1, \dots, b_p) \neq (3, 2, \dots, 2)$. Cette inégalité est clairement satisfaite dès que $p \geq 2$ et qu'il existe un $b_i \geq 4$ ou deux $b_j \geq 3$.

Dans une strate minimale avec uniquement des pôles d'ordre -2 , il y a exactement deux composantes connexes. La construction qui précède ne permet d'obtenir que la composante dont le nombre de rotation a la même parité que p . On propose alors une deuxième construction. On prend $p-1$ parties polaires et on les colle comme précédemment. La dernière partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On identifie les vecteurs i entre eux et les deux autres bords comme précédemment. Le lacet β est défini comme précédemment et a pour indice p . Le lacet α connecte le milieu de des segments v sans sortir du domaine polaire de P_p . Son indice est donc 1. On construit une différentielle avec n'importe quels résidus dans la composante connexe dont le nombre de rotation est 1.

Il reste le cas des composantes connexes de $\Omega\mathcal{M}_1(2p; (-2^p))$ avec p impair pour lesquelles le nombre de rotation est 2. On reprend la construction précédente pour les $p - 2$ premiers pôles. On associe au pôle P_{p-1} partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On associe à P_p la partie polaire associée à $(i; i)$. On identifie les bords comme précédemment. Ainsi, les lacets analogues à ceux de la construction précédente auront pour indices respectifs $p - 1$ et 2. Le nombre de rotation de la surface est donc 2. C.Q.F.D.

4. PLURIDIFFÉRENTIELLES EN GENRE ZÉRO

Dans cette section, nous considérons les k -différentielles de genre zéro pour $k \geq 2$. Cette section est organisée de la façon suivante. Le cas des strates de k -différentielles ayant un pôle d'ordre non divisible par k est traité dans la section 4.1. La section 4.2 traite des strates ayant uniquement des pôles d'ordres divisibles par k strictement inférieurs à $-k$. La section 4.3 traite du cas des strates dont tous les pôles sont d'ordres divisibles par k , certains strictement inférieur à $-k$ et d'autres égaux à $-k$. Enfin, la section 4.4 traite des strates qui n'ont que des pôles d'ordre $-k$.

4.1. Différentielles ayant un pôle d'ordre inférieur non divisible par k . Rappelons que la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . En genre zéro, beaucoup de ces strates sont vides comme le montre le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Soient $\mu = (m_1, \dots, m_t)$ un t -uplet tel que $\sum m_i = -2k$ et $d = \text{pgcd}(\mu, k)$. Toutes les k -différentielles de type μ sont la puissance dième d'une k/d -différentielle primitive de $\Omega^{k/d}\mathcal{M}_0(\mu/d)$.*

Démonstration. Une k -différentielle ξ sur \mathbb{P}^1 de type μ est donnée par la formule

$$\xi = \prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i} (dz)^k = \left(\prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i/d} (dz)^{k/d} \right)^d.$$

C.Q.F.D.

A partir de maintenant nous ne considérons que des strates non vides. Dans le cas où il existe des pôles d'ordres non divisibles par k , nous commençons par caractériser l'image de l'application k -résiduelle pour les strates ayant un unique zéro.

Lemme 4.2. *Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est*

- i) $\mathcal{R}_0^k(\mu)$ si $r \geq 2$ ou $s \geq 1$,
- ii) $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si $r = 1$ et $s = 0$.

Démonstration. Nous commençons par donner la construction d'une k -différentielle dans la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ dont les k -résidus sont donnés par (R_1, \dots, R_{p+s}) dans $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Pour les pôles P_{p+i} d'ordres $-k$, nous prenons une k -partie polaire d'ordre k associée à une racine k ième r_{p+i} de R_{p+i} . Pour chaque pôle P_i d'ordre $-b_i = -k\ell_i$ tel que $R_i \neq 0$, nous prenons une k -partie polaire non triviale d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Si R_i n'est pas un imaginaire pur ou $k \neq 2$ nous choisissons une racine r_i avec une partie réelle positive. Dans le cas où $k = 2$ et R_i est un imaginaire pur, nous choisissons la racine r_i de partie imaginaire positive. Pour les pôles d'ordre $-b_i$ tels que $r_i = 0$ nous prenons une k -partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ où r_{j_i} est l'une des racines choisie précédemment.

Maintenant, pour tous les pôles d'ordre $-c_i$ sauf un, disons P_1 d'ordre $-c_1$, nous prenons une k -partie polaire de type c_i associée à $(1; \emptyset)$. Pour le dernier pôle P_1 d'ordre $-c_1$, nous prenons la k -partie polaire de type c_1 associée à $(\emptyset; (1^{r-1}, r_1, \dots, r_l))$ où l est le nombre de résidus non nuls et on suppose ces nombres rangés par argument croissant.

La surface est obtenue par les recollements suivant. Nous collons le segment inférieur r_{j_i} de chaque k -partie polaire triviale au bord de la partie non triviale du pôle P_{j_i} . Nous faisons les collages similaires, pour chacun des pôles d'ordre divisible par k dont le résidu est nul. Ensuite nous collons par translation les bords des k -parties polaires différentes de P_1 aux segments correspondants du bord de la k -partie polaire de P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 10. La k -différentielle ξ associée à cette surface plate possède les ordres de pôles et les k -résidus souhaités.

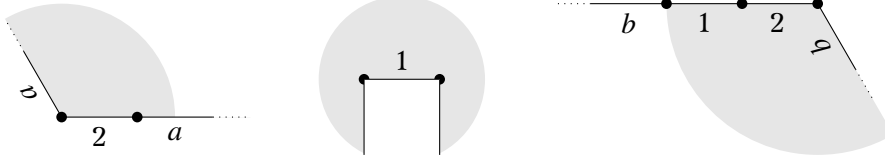


FIGURE 10. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu non nul au pôle d'ordre -6 .

Il reste donc à montrer que le genre de la surface est zéro et que la différentielle ξ possède un unique zéro; Pour cela, il suffit de vérifier que si l'on coupe la surface le long d'un lien selle, alors on sépare cette surface en deux parties. C'est une conséquence du fait que les liens selles correspondent aux bords des domaines polaires.

Pour terminer la preuve du lemme 4.2, il reste à considérer le cas où les k -résidus sont égaux à $(0, \dots, 0)$. Remarquons que s'il existe un pôle d'ordre $-k$, alors $(0, \dots, 0)$ n'est pas dans l'espace résiduel de la strate. Nous supposons donc que $s = 0$ dans la suite de la preuve. Nous montrons maintenant que l'origine appartient à l'image de l'application k -résiduelle d'une strate avec $r \geq 1$ si et seulement si $r \geq 2$.

Montrons que l'origine appartient à l'image de l'application résiduelle s'il existe au moins deux pôles P_1 et P_2 d'ordres respectifs $-c_1$ et $-c_2$ non divisible par k . Pour tous les autres pôles nous associons la même k -partie polaire que précédemment. Plus précisément, pour chaque pôle d'ordre $-b_i$ divisible par k nous prenons une k -partie polaire d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordres non divisibles par k distincts de P_1 , nous prenons la k -partie polaire associée à $(1; \emptyset)$. Pour P_1 nous prenons la k -partie polaire d'ordre c_1 associée à $(\emptyset; (1^r))$.

Les collages sont les suivants. Nous collons le bord inférieur de la k -partie polaire du i -ième pôle d'ordre divisible par k au bord d'en haut du $(i+1)$ -ième pôle d'ordre divisible par k . Le bord inférieur de la k -partie polaire associée au pôle P_p est collé au bord du segment du pôle P_2 . Enfin, tous les segments restant sont collés au bord de la k -partie polaire associée à P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 11. On vérifie facilement que cette surface possède les propriétés souhaitées.

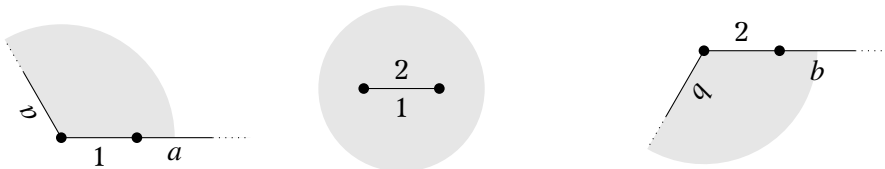


FIGURE 11. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu nul.

Nous montrons enfin que s'il n'existe qu'un seul pôle d'ordre $-c$ non divisible par k , alors l'origine n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle. Soit ξ_0 une k -différentielle de $\Omega^k\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; -c)$. Nous considérons le revêtement canonique $(\tilde{X}_0, \tilde{\omega}_0, \pi)$ de ξ_0 . On déduit facilement du fait que π soit ramifié au dessus d'exactly deux points (le zéro

d'ordre a et le pôle d'ordre $-c$) que \widehat{X}_0 est isomorphe à \mathbb{P}^1 . Plus précisément, la proposition 2.4 de [BCGGM19] implique que $\widehat{\omega}_0$ appartient à la strate

$$\Omega\mathcal{M}_0\left(a+k-1; k-c-1, \left(\left(\frac{-b_1}{k}\right)^k\right), \dots, \left(\left(\frac{-b_p}{k}\right)^k\right)\right).$$

Le théorème 1.5 implique que les résidus de $\widehat{\omega}_0$ ne sont pas tous nuls. Par conséquent, les k -résidus de ξ_0 ne sont pas tous nuls. C.Q.F.D.

Lemme 4.3. *L'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ est surjective pour $n \geq 2$ et $r \geq 1$.*

Démonstration. Si $r \geq 2$ ou $r = 1$ et $s \geq 1$, on peut simplement éclater le zéro des différentielles données par le lemme 4.2. On suppose maintenant $r = 1$ et $s = 0$. Par éclatement de zéros, il suffit de montrer que l'origine appartient à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p; -c)$. Nous écrivons $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1, \bar{a}_2 \leq 0$. Nous considérons deux cas selon que $l_1, l_2 \geq p$ ou il existe $l_i < p$.

Dans le cas où $l_1, l_2 \geq p$, on associe aux pôles d'ordres $-b_i$ les k -parties polaires d'ordres b_i et de types τ_i associées à $(1; 1)$. De plus, on choisit les types τ_i de telle sorte que la somme $\sum_i \tau_i$ soit inférieure ou égale à l_1 et maximale pour cette propriété. On note $\bar{l}_1 = l_1 - \sum_i \tau_i$. Pour le pôle d'ordre $-c$ on procède de la façon suivante. On prend la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1, \exp(\pi + \bar{a}_2 \frac{2i\pi}{k}))$ et de type $\bar{l}_1 + 1$. Notons que cette construction est possible même si $\bar{a}_2 = 0$. On obtient la différentielle souhaitée en identifiant le bord inférieur de la k -partie polaire associée à P_i au bord supérieur de celle de P_{i+1} . Le bord supérieur de P_1 est identifié au segment 1 de la k -partie polaire d'ordre c . Le bord inférieur de la k -partie polaire d'ordre b_p est identifié par rotation au segment $\exp(\bar{a}_2 \frac{2i\pi}{k})$. Cette construction est illustrée à gauche de la figure 12.

Considérons le cas où il existe $l_i < p$. Nous supposons sans perte de généralité qu'il s'agit de l_1 . On associe au pôle d'ordre $-c$ la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1)$. Pour l'un des pôles d'ordre $-b_i$, disons $-b_1$, on associe la k -partie polaire d'ordre b_1 associée à $(1; v_1, v_2)$, avec v_i de même longueur, $v_1 + v_2 = 1$ et l'angle (dans la partie polaire) entre ces deux étant $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. Pour l_1 pôles d'ordre $-b_i$, on associe des k -parties triviales associées à $(v_1; v_1)$ et de type $\tau_i = b_i - 1$. On colle ces k -parties polaires de manière cyclique à v_1 et v_2 . Le point correspondant à l'intersection entre v_1 et v_2 est la singularité d'ordre a_1 . On associe aux autres pôles d'ordre $-b_i$ la k -partie polaire triviale associée à $(1; 1)$. On colle ces parties polaires de manière cyclique aux parties polaires d'ordres b_1 et c pour obtenir la surface plate souhaitée. Cette construction est illustrée à droite de la figure 12. C.Q.F.D.

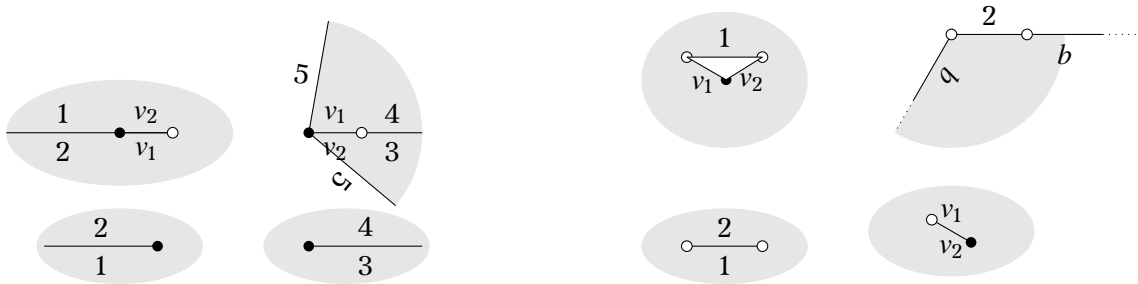


FIGURE 12. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(4, 6; -9; -7)$ (à gauche) et de $\Omega^3\mathcal{M}_0(2, 8; (-6^3); -4)$ (à droite) dont tous les 3-résidus sont nuls.

4.2. Les strates avec $r = s = 0$ et $p \neq 0$. Cette section est dédiée aux strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$. Insistons sur le fait que dans toute cette section, nous ne considérons que les strates non vide. D'après le lemme 4.1, cela revient à supposer que

$\text{pgcd}(a_i, k) = 1$. Enfin nous dénotons tout au long de cette section $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

Nous commençons par le cas le plus simple et le plus intéressant de strates n'ayant qu'un pôle.

Lemme 4.4. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ une strate non vide de genre 0. L'image de l'application résiduelle de cette strate est \mathbf{C} si $n \geq 3$ et \mathbf{C}^* si $n = 2$.*

Démonstration. Considérons tout d'abord les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ où $\mu = (a_1, a_2; -k\ell)$ à deux zéros d'ordres premiers avec k . Il suffit de montrer que l'image de l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ ne contient pas 0.

Soit (X, ξ) une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell)$. Il existe un lien selle γ entre les deux zéros de ξ . Sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{\gamma\}$, la différentielle $\xi^{1/k}$ est une différentielle abélienne. Le bord de cette surface plate est constitué de deux segments γ_i qui sont identifiés l'un à l'autre pour former le lien selle γ de ξ . Comme ξ est primitive, le collage fait intervenir une rotation d'angle $\frac{2l_i}{k}$, avec $\text{gcd}(l, k) = 1$. Le k -résidu au pôle est la puissance k ième de la somme des périodes des chemins γ_1 et γ_2 , qui est donc non nulle.

Nous considérons maintenant les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ avec $n \geq 3$ zéros. Nous commençons par montrer le point crucial : l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(a_1, a_2, a_3; -k\ell)$ contient 0. Comme $\text{pgcd}(a_i, k) = 1$, nous pouvons supposer que a_1 et a_2 ne sont pas divisibles par k .

Nous commençons par construire une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, a'_3; -2k)$, où a'_3 est donné par la condition $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + a'_3 = 0$. Notons qu'il existe un l'_3 tel que $a_3 = l'_3 k + a'_3$. On se donne la k -partie polaire triviale d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; w_1, w_2)$ où les v_i, w_j sont définis comme suit. On a $v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = 1$ et l'angle formé au point de concaténation de v_1 et v_2 (resp. w_1 et w_2) est $(k + \bar{a}_1)\frac{2\pi}{k}$ (resp. $(k + \bar{a}_2)\frac{2\pi}{k}$). Dans la phrase précédente, il va sans dire que l'angle est calculé dans les k -parties polaires $D^+(v_1, v_2)$ et $D^-(w_1, w_2)$. Nous obtenons une surface plate S_0 en collant (par rotation) v_1 avec v_2 et w_1 avec w_2 . Cette construction (ainsi que la suivante) est illustrée par la figure 13. On peut vérifier que les choix fait dans la construction impliquent que la différentielle associée possède les invariants locaux souhaités.

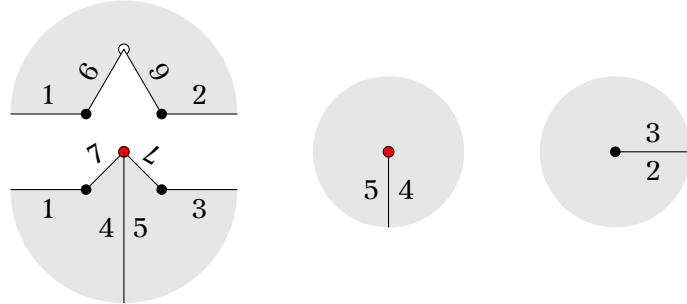


FIGURE 13. Pluridifférentielle de $\Omega^6 \mathcal{M}_0(-1, 2, 5; -18)$ dont le 6-résidu est nul.

À présent, nous construisons une différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -k\ell)$ dont le k -résidu est nul. Nous partons de l'union disjointe de la surface plate S_0 de $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, a'_3; -2k)$ construite au paragraphe précédent et de $l_1 + l_2 + l'_3$ plans. Dans chacun de ces plans, nous faisons une demi-fente respectivement vers le haut pour l_1 plans, vers le bas pour l_2 plans et vers la droite pour les l'_3 plans restants. À chaque singularité conique de S_0 nous faisons une demi-fente dans la direction correspondante. La surface plate S est obtenue en collant cycliquement les bords des fentes par translation. Il n'est pas difficile de vérifier que cette surface plate possède les propriétés souhaitées.

Enfin, pour $n > 3$ zéros, nous procédons par récurrence sur n en utilisant l'éclatement des zéros (Propriété 2.5). Même si, dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir une k -différentielle en éclatant un zéro d'une k -différentielle primitive, nous montrerons que dans le

cas que nous traitons, toutes les k -différentielles peuvent s'obtenir en éclatant un zéro d'une k/d -différentielle primitive avec $d < k$. Nous venons de montrer que l'application résiduelle est \mathbf{C}^* pour $n = 2$ et contient 0 pour $n = 3$. Il suffit donc de montrer qu'il existe a_i et a_j tels que $a_i + a_j > -k$ et $d := \text{pgcd}(\mu \setminus \{a_i, a_j\} \cup \{a_i + a_j\}, k) \neq k$. En effet, dans ce cas, on peut éclater le zéro d'ordre $a_i + a_j$ des k -différentielles qui sont la puissance dième d'une (k/d) -différentielle de la strate $\Omega^{k/d} \mathcal{M}_0\left(\frac{\mu}{d} \setminus \left\{\frac{a_i}{d}, \frac{a_j}{d}\right\} \cup \left\{\frac{a_i+a_j}{d}\right\}\right)$. La multiplicativité du k -résidu (cf. équation (2.1)) permet alors de conclure.

Montrons que l'on peut toujours trouver deux ordres a_i et a_j comme ci-dessus. Supposons tout d'abord qu'il existe a_i, a_j tels que $a_i + a_j < -k$. En particulier, $-k < a_i, a_j < 0$ et donc l'addition de a_i à n'importe lequel des ordres positifs vérifie les conditions ci-dessus. Maintenant nous supposons que la somme de toutes les paires d'ordres a_i, a_j sont strictement supérieurs à $-k$. Dans le cas où $d = k$ pour un choix a_i, a_j , alors pour tout $l \neq i, j$ les a_l sont divisibles par k . Donc a_i et a_j sont premiers avec k . En particulier, on peut choisir a_i et a_l pour $l \neq j$ pour obtenir la condition ci-dessus. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas de $p \geq 2$ pôles. Nous commençons par traiter le cas du complémentaire de l'origine. Le résultat suivant donne le résultat pour $k \geq 3$ et couvre la majeure partie du cas $k = 2$

Lemme 4.5. *L'image de $\mathfrak{R}_0^k(a_1, \dots, a_n; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 1$ contient l'espace $\mathfrak{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si $k \geq 3$. L'image de $\mathfrak{R}_0^2(a_1, \dots, a_n; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p)$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 1$ contient le complémentaire des droites engendrées par les vecteurs qui ne contiennent que des 0 et des 1.*

Démonstration. Nous commençons par le cas des strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$. Nous supposons que les pôles dont le k -résidu est nul sont P_1, \dots, P_t et que les k -résidus R_{t+1}, \dots, R_p aux pôles P_{t+1}, \dots, P_p sont non nuls.

Supposons tout d'abord que $-k < a_1 < 0$. Soit $R = (R_1, \dots, R_p) \neq (0, \dots, 0)$, on construit une différentielle dont les k -résidus sont R de la manière suivante. Pour $i > t$, nous prenons une racine k ième r_i de R_i telle que $\Re(r_i) \geq 0$ et si $\Re(r_i) = 0$, alors $\Im(r_i) > 0$. Nous définissons v_1 et v_2 deux vecteur de même longueur, tels que l'angle entre v_1 et v_2 est $\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$, et de somme égale à $S = \sum_{i \geq 2} r_i - r_1$. Ces vecteurs sont non nuls si et seulement si $S \neq 0$. Si $r_1 = 0$, cette condition est une conséquence de l'hypothèse sur les parties réelles et imaginaires des r_i . Si $r_1 \neq 0$, alors quitte à permuter les pôles ou à changer une des racines r_i par une autre, on montre que l'on peut satisfaire cette condition sauf dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, b_1 + b_2 - 3; -b_1, -b_2)$ avec les résidus quadratiques égaux à $(1, 1)$ (qui n'est pas considéré dans ce lemme).

Considérons le cas distinct de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, b_1 + b_2 - 3; -b_1, -b_2)$ avec les résidus quadratiques égaux à $(1, 1)$. Prenons le pôle P_1 d'ordre $-k\ell_1$ et de k -résidu R_1 . On associe alors à ce pôle la k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ si $R_1 = 0$ et la k -partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; r_2, \dots, r_p)$ si $R_1 \neq 0$. Notons que l'angle (calculé dans D^+) au point d'intersection des v_i est $2\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$. Pour les autres pôles P_i , on prend une k -partie polaire associée à $(r_i; \emptyset)$ si $R_i \neq 0$ et $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$ si $R_i = 0$. Il reste par identifier tous les segments par translation à exception des v_i que nous identifions par rotation. On vérifie de manière analogue à précédemment que cette surface plate possède les invariants locaux souhaités.

Nous supposons maintenant que a_1 et a_2 sont supérieurs ou égaux à 0. De plus, nous supposons que $l_1 \leq l_2$ dans l'écriture $a_i = kl_i + \bar{a}_i$. La construction dépend de l'existence, ou non, d'un entier $m \leq t$ tel que

$$\ell_m^- := \sum_{i=1}^{m-1} (\ell_i - 1) < l_1 \leq \sum_{i=1}^m (\ell_i - 1). \quad (4.1)$$

Supposons qu'il existe un m satisfaisant l'équation (4.1). On associe au pôle P_m la k -partie polaire d'ordre $k(\ell_m - (l_1 - \ell_m^-) + 1)$ et de type $\ell_m - (l_1 - \ell_m^-)$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ où les v_i sont de même longueur, $v_1 + v_2 = \sum r_i$ et l'angle à leur intersection est $2\pi + \frac{2a_i\pi}{k}$. Puis on coupe cette partie polaire par une demi-droite commençant au point d'intersection de v_1 et v_2 . Enfin on colle de manière cyclique $(l_1 - \ell_m^- - 1)$ domaines basiques triviaux à cette demi droite. En prenant les r_i tels que $\Re(r_i) \geq 0$ et $\Im(r_i) \geq 0$ si $\Re(r_i) = 0$, la ligne brisée formée des r_i ne possède pas de points d'auto-intersection. Ensuite, on associe aux $m - 1$ premiers pôles la k -partie polaire d'ordre b_i et de type 1 associée à $(v_1; v_1)$. On colle les bords de ces k -parties polaires entre elles par translation de manière cyclique. Les segments v_1 et v_2 de la k -partie polaire spéciale sont collés aux bords restant par rotation et translation. Pour les autres pôles P_i d'indices $m < i \leq t$, on prend la k -partie polaire associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$. Les identifications sont données comme précédemment. Cette construction est illustrée par la figure 14. Cela donne une k -différentielle avec les invariants locaux souhaités.

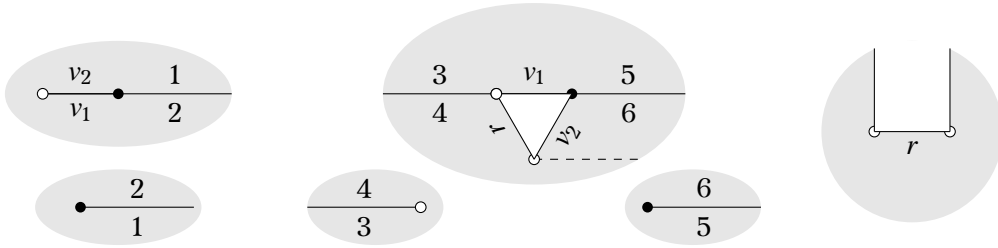


FIGURE 14. Une 6-différentielle dans $\Omega^6 \mathcal{M}_0(17, 25; -12, -18, -24)$ avec un unique 6-résidu non nul au pôle d'ordre -12 .

Supposons qu'il n'existe pas d'entier m satisfaisant à l'équation (4.1). On prend le pôle, disons P_p , d'ordre $-b_p$ minimal parmi les pôles ayant un k -résidu non nul. On partitionne les autres pôles avec un k -résidu non nul en deux parties A_i . Ces deux parties sont telles que les deux sommes $S_i := \sum_{P_j \in A_i} \ell_j$ soient respectivement inférieures ou égales à l_i . Notons que cette condition peut toujours être satisfaite. En effet, l'égalité $l_1 + l_2 = 1 + \sum_i \ell_i$ et la minimalité de $-\ell_p$ impliquent que $\ell_{p-1} \leq (l_1 + l_2)/2$ et donc que $\ell_{p-1} \leq l_2$. On conclut par récurrence sur le nombre de pôles dont le résidu est non nul. On notera $A_1 = \{P_{t+1}, \dots, P_{p_0}\}$ et $A_2 = \{P_{p_0+1}, \dots, P_{p-1}\}$. Pour les pôles de A_i , prenons des racines r_i des R_i telles que $(-1)^i \Re(r_i) \geq 0$ et $(-1)^i \Im(r_i) \geq 0$ en cas d'égalité.

Nous donnons maintenant la construction des k -différentielles, qui est illustrée par la figure 15 avec $l_1 = 3$, $l_2 = 4$ et $S_1 = S_2 = 1$. On associe au pôle P_p la k -partie polaire d'ordre $k\ell_p$ et de type τ associée à $(v_1, -r_{t+1}, \dots, -r_{p_0}; r_{p_0+1}, \dots, r_{p-1}, v_2)$ où les v_i sont choisis avec les mêmes conditions sur les angles et les longueurs que précédemment, de manière que le k -résidu associé à cette k -partie polaire soit R_p . Il existe de tels v_i si $\sum_{i=t+1}^{p_0} -r_i \neq \sum_{i=p_0+1}^{p-1} r_i$. Quitte à changer les r_i comme au premier paragraphe de cette preuve, cette inégalité est satisfaite si $k \geq 3$ et si $k = 2$ avec les résidus quadratiques non tous proportionnels à zéro ou un. Enfin nous choisissons le type τ tels que les inégalités $S_1 + \tau \leq l_1$ et $S_2 + (\ell_p - 1 - \tau) \leq l_2$ soient satisfaites. Remarquons qu'aucune des lignes brisées ne possède pas de points d'auto-intersection. On associe aux pôles de A_1 les parties polaires de type b_i associées à $(\emptyset; -r_i)$ et à ceux de A_2 celles de type b_j associées à $(r_j; \emptyset)$. Enfin on procède comme précédemment avec les pôles dont le k -résidu est nul. La période des liens selles au bord de ces domaines polaires est choisie de telle façon que l'on obtienne les zéros d'ordres désirés. Puis on procède aux collages de manière analogue à précédemment.

Enfin, on montre par éclatement de zéros que l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient l'espace $\mathcal{R}_0(\mu) \setminus \mathbb{C} \cdot (1, \dots, 1)$ pour $n \geq 3$ zéros. C.Q.F.D.

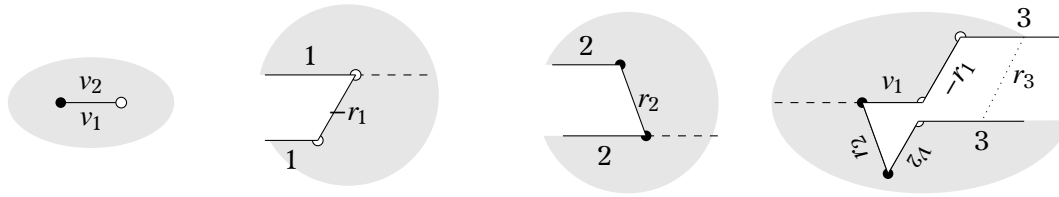


FIGURE 15. Une 6-différentielle dans $\Omega^6 \mathcal{M}_0(17, 19; (-12^4))$ dont les 6-résidus sont $(0, r_1^6, r_2^6, r_3^6)$.

Nous traitons les cas de des strates quadratiques qui ne sont pas couverts par le lemme 4.5. Dans ce cas, il existe des strates dont l'application 2-résiduelle ne contient pas le complémentaire de l'origine.

Lemme 4.6. *L'application 2-résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $a_i \geq -1$ impairs et $p \geq 2$ nombres pairs $b_i \geq 4$ contient tous les uplets contenant un nombre impair d'éléments égaux à 1 et un nombre arbitraire égaux à 0.*

Démonstration. Dans un premier temps, on considère le cas où tous les résidus quadratique sont nuls à l'exception d'un seul que l'on supposera égal à 4. Nous allons donner une construction qui fournit une différentielle quadratique de la strate considérée avec les résidus quadratiques souhaités.

Nous recollons des domaines polaires standards (voir la section 2.2) le long de liens selles selon un graphe d'incidence. Ce graphe est composé d'une boucle formée par s sommets de valence 2 et collée à un sommet de valence 3 auquel est attaché une chaîne composée de $p - s - 1$ sommets se terminant par un sommet de valence 1. Le cas extrême $p = s$ correspond à un graphe cyclique, mais la construction reste la même. Les s sommets de la boucle correspondent à des domaines polaires associés aux vecteurs $(1; 1)$, tandis que les $p - s - 1$ sommets intermédiaires de la chaîne correspondent à des domaines polaires associés aux vecteurs $(2; 2)$. Le sommet de valence 3 correspond à un domaine polaire associé aux vecteurs $(1, 1; 2)$ et le dernier sommet de la chaîne correspond à un domaine polaire associé aux vecteurs $(2; \emptyset)$. Si $s = p$, un domaine polaire est associé aux vecteurs $(1, 1; \emptyset)$ et les autres à $(1; 1)$. La différentielle quadratique obtenue en recollant les parties polaires selon le graphe d'incidence possède un 2-résidu égal à 4 et $p - 1$ nuls.

Nous montrons maintenant que la différentielle ainsi formée peut avoir les zéros d'ordres souhaités. Cela se fait grâce au choix du type des domaines polaires (voir la section 2.2). On peut remarquer que l'une des singularités coniques n'est adjacent qu'aux domaines polaires de la boucle tandis que l'autre est adjacent à tous les domaines polaires. On note a_1 l'ordre de la première singularité. L'angle de cette singularité est $\pi + 2s\pi$ auquel on ajoute des multiples de 2π correspondant aux types des domaines polaires qui contribuent à cette singularité. Sachant que l'on peut mettre n'importe quel sommet de résidu nul dans la boucle, l'angle total de cette singularité peut aller de π (si $s = 0$ et que le type du domaine correspondant au sommet de valence 3 est choisi de façon adéquate) jusqu'à $-\pi + \pi \sum_{j=1}^p (b_j - 2)$. L'ordre de a_i peut donc aller de -1 jusqu'à $-3 + \sum_{j=1}^p (b_j - 2)$. Ceci couvre tous les ordres possibles et donc toutes les strates considérées.

Nous traitons maintenant le cas général d'un nombre $t \geq 3$ impair de résidus quadratiques égaux entre eux. Pour obtenir les configurations de résidus avec un nombre impair de résidus égaux, il suffit en partant de la différentielle construite au paragraphe précédent de changer des paires de pôles à résidus nul en paires de pôles à résidus égaux à 4. Pour cela, on considère deux domaines polaires à résidu nul séparés par un lien-selle d'une certaine longueur. On accroît cette longueur jusqu'à ce que chacun des deux résidus quadratiques soient égaux à 4. Ce processus ne modifie pas l'ordre des zéros. On applique

cette construction à $(t - 1/2)$ paires de domaines polaires consécutives. Notons que la forme du graphe de connections implique qu'il existe un choix pour ces paires. On obtient ainsi les différentielles quadratiques ayant les invariants locaux souhaités. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant les cas des strates quadratiques $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ contenant un nombre pair de résidus quadratiques égaux entre eux.

Lemme 4.7. *L'application 2-résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $a_i \geq -1$ impairs et $p \geq 2$ nombres pairs $b_i \geq 4$ contient tous les uplets contenant un nombre pair supérieur ou égal à 4 d'éléments égaux à 1 et un nombre arbitraire égaux à 0.*

Démonstration. Nous commençons par montrer que la configuration $(1, 1, 1, 1)$ est réalisable dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5, -4^4)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 3, -4^4)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, 1, -4^4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13, -1, -4^4)$.

D'après la figure 16, il existe une différentielle quadratique dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5, -4^4)$ dont les résidus quadratiques sont $(1, 1, 1, 1)$.

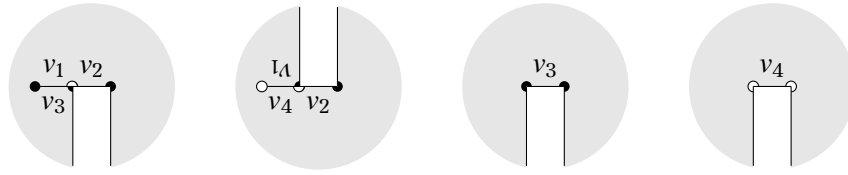


FIGURE 16. Une 2-différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5; (-4^4))$ dont les 2-résidus sont $(1, 1, 1, 1)$.

Pour les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13 - 2k, -1 + 2k; (-4^4))$ avec $0 \leq k \leq 2$, nous allons recoller des parties polaires d'ordre 4 le long de liens selles selon un graphe d'incidence. Ce graphe est composé d'une boucle formée par k sommets de valence 2 et collée à un sommet de valence 3 auquel est attaché une chaîne composée de $3 - k$ sommets comme montré dans la figure 17. La 2-partie polaire correspondant au sommet de valence 1 est associée au

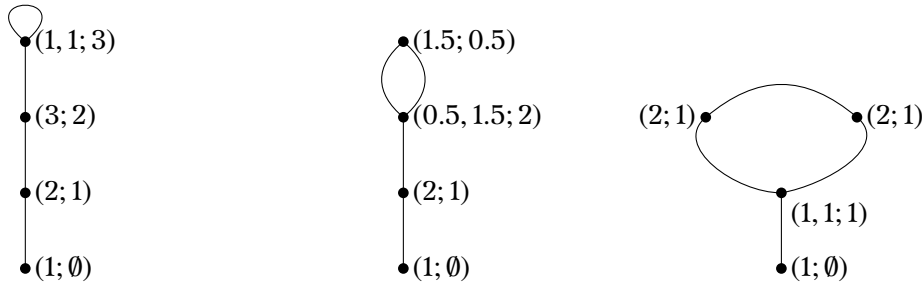


FIGURE 17. Les graphes d'incidence pour les exemples dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13 - 2k, -1 + 2k; (-4^4))$ avec $0 \leq k \leq 2$ de gauche à droite.

vecteur $(1; 0)$. Les parties 2-polaires correspondant aux sommets de valence 2 sont associées à des vecteurs de la forme $(v + 1; v)$. Enfin, la partie 2-polaire correspondant au sommet de valence 3 est associée à des vecteurs de type $(v_1, v_2; v_1 + v_2 - 1)$ ou $(v_1, v_2; v_1 + v_2 + 1)$ tels que les vecteurs v_i correspondent au arêtes de la boucle. Cela est montré dans chaque cas dans la figure 17. On vérifie sans difficulté que le recollement de ces parties polaires donne des différentielles quadratiques aux singularités souhaitées.

Dans le cas où tous les pôles sont d'ordres -4 , on ajoute aux différentielles quadratiques construites aux paragraphes précédents des parties 2-polaires comme suit. Pour obtenir des pôles dont les résidus quadratiques sont égaux à 1, resp. 0, on peut ajouter une partie polaire associée à des vecteurs de la forme $(v; v + 1)$, resp. (v, v) , à la boucle ou à la chaîne. La première opération ajoute 2 à l'ordre de chaque zéro et la seconde 4 à l'ordre du zéro le plus grand. Cela permet d'obtenir toutes les strates considérées.

Dans le cas général, il suffit de coller des plans de manière cyclique à une demi-fente infinie partant de l'un des deux zéros. Un calcul simple montre que l'on peut obtenir tous les ordres des deux zéros. C.Q.F.D.

Il reste à présent le cas des strates quadratiques $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ dont exactement deux résidus quadratiques sont non nuls et égaux entre eux. On traite d'abord les cas pour lesquels un pôle d'ordre -6 ou moins a un résidu non nul.

Lemme 4.8. *L'image de l'application 2-résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $a_i \geq -1$ impairs et $p \geq 2$ nombres pairs $b_i \geq 4$ contient $(1, 1, 0, \dots, 0)$ dès lors qu'un pôle d'ordre inférieur ou égal à -6 possède un résidu nul.*

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que $(1, 1, 0)$ est dans l'image de l'application 2-résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 5; -4, -4, -6)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 3; -4, -4, -6)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 1; -4, -4, -6)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, -1; -4, -4, -6)$ si le pôle d'ordre -6 a un 2-résidu nul.

On commence par la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 5; -4, -4, -6)$. Pour le pôle d'ordre -6 , on colle par translation les demi-fentes infinies de deux domaines polaires ouverts à droite associés au vecteur $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordre -4 on considère deux parties 2-polaires d'ordre 4 associés à $(1; \emptyset)$. La différentielle quadratique est obtenue en collant les deux segments des parties 2-polaires d'ordre -4 aux segments inférieurs de celle d'ordre 6 par translation et les deux segments supérieurs entre eux par rotation d'angle π .

Pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, -1; -4, -4, -6)$, on considère une partie 2-polaire d'ordre 6 associée à $(1, 1; 1, 1)$ et deux parties 2-polaires d'ordre 4 associées à $(1, \emptyset)$. On colle les deux segments supérieurs de la 2-polaire d'ordre 6 par translation et les autres segments par translations.

Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 3; -4, -4, -6)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 1; -4, -4, -6)$, nous considérons des parties 2-polaires d'ordre 4 associées respectivement à $(v_2, v_3; v_1)$ et v_3 où $v_1 = v_2 = 1/2$ et $v_3 = 1$. Pour les pôles d'ordre -6 , on considère la partie 2-polaire d'ordre 6 associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ dans le premier cas et à $(v_2, v_1; \emptyset)$ dans le second. Les recollements des sommets v_i entre eux donnent les différentielles quadratiques voulues.

Comme dans la preuve du lemme 4.7, l'ajout de parties 2-polaires et l'augmentation de l'ordre de certains pôles en collant cycliquement des plans avec des demi-fentes infinies, permet d'obtenir les 2-résidus $(1, 1, 0, \dots, 0)$ dans tout les cas considérés. C.Q.F.D.

Il reste donc à considérer les cas avec deux 2-résidus non nuls égaux entre eux et avec des 2-résidus nuls uniquement à des pôles d'ordre -4 .

Lemme 4.9. *Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ une strate avec $a_1, a_2 \geq -1$ impairs et $p \geq 2$ nombres pairs $b_i \geq 4$. L'application 2-résiduelle de cette strate contient le complémentaire de l'origine de l'espace 2-résiduel sauf pour les deux familles exceptionnelles suivantes.*

- (1) *L'image de l'application 2-résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 5, 2p + b - 5; -b, -b - 2, (-4^{p-2}))$ est le complémentaire de la droite engendrée par $(1, 1, (0^{p-2}))$ dans l'espace 2-résiduel.*
- (2) *L'image de l'application 2-résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 7, 2p + b - 5; -b, -b, (-4^{p-2}))$ est le complémentaire de la droite engendrée par $(1, 1, (0^{p-2}))$ dans l'espace 2-résiduel.*

Démonstration. D'après les lemmes 4.5 à 4.8 il reste à traiter les 2-résidus de la forme $(1, 1, 0, \dots, 0)$ dans les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, -b_2, (-4^{p-2}))$, où tout les pôles d'ordre -4 ont un résidu nul. Nous allons étudier de façon exhaustive toutes les façons de réaliser ces singularités pour ces strates. Nous supposons que $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$.

Si une telle 2-différentielle existe, alors elle possède un cœur dégénéré. Elle est donc constituée de p domaines polaires séparés par p liens selles horizontaux. Ces domaines polaires connectés selon un graphe d'incidence avec p sommets et de p arêtes (le graphe est donc de genre 1). Comme un sommet correspondant à un pôle de résidu nul ne peut pas être de valence 1 (le lien selle correspondant serait de longueur nulle), il y a au plus 2 sommets de valence 1. Nous allons étudier successivement les cas avec 0, 1 et 2 sommets de valence 1.

S'il n'y a aucun sommet de valence 1, le graphe d'incidence est cyclique. Il faut alors considérer les longueurs des liens selles le long du cycle. De part et d'autre d'un domaine polaire de 2-résidu nul, les liens selles conservent la même longueur. Les longueurs des liens selles au bord des domaines polaires de 2-résidu égal à 1 satisfont $\lambda + \mu = 1$ ou $\mu - \lambda = 1$. La 2-différentielle étant primitive, chaque pôle satisfait une égalité différente. Cela donne une contradiction et une telle 2-différentielle ne peut pas exister.

S'il y a exactement un sommet de valence 1, le graphe d'incidence est du même type que ceux de la figure 17, avec un nombre arbitraire de sommets sur la boucle et sur la chaîne. La construction décrite dans la preuve du lemme 4.7 s'applique de manière analogue. Nous donnons maintenant la description des strates qui peuvent s'obtenir de cette façon. Il s'agit de répartir les domaines polaires de façon à réaliser les ordres des zéros souhaités. L'ordre de la singularité conique au bord des domaines polaires de la chaîne est supérieur ou égal à $2p - 3 + b_1$ (si b_1 est au bout de la chaîne). En effet, chaque domaine polaire contribue à cette singularité conique d'un angle supérieur ou égal à 2π , auxquels se rajoutent 2π pour le sommet de valence 3 et $(b_1 - 3)\pi$ pour celui de valence 1. On peut donc attribuer à l'une des deux singularités n'importe quelle valeur (impaire) à partir de $2p - 3 + b_1$. Comme $a_1 + a_2 = -4 + b_1 + b_2 + 4(p - 2)$, cela signifie que l'autre singularité prendra au plus la valeur $-4 + b_1 + b_2 + 4(p - 2) - (2p - 3 + b_1)$, c'est-à-dire $2p - 9 + b_2$. Donc, si $b_2 \geq b_1 + 6$, tous les ordres de singularités sont réalisables. Si $b_2 = b_1 + 4$, alors on a $a_2 \geq b_1 + 2p - 1 > 2p - 3 + b_1$, et tous les ordres de zéros sont donc possibles. Dans les cas avec $b_2 = b_1$ ou $b_2 = b_1 + 2$ on vérifie de la même façon que l'on peut obtenir tous les ordres de zéros à l'exception des deux cas listés dans le lemme 4.9.

Il reste donc à montrer pour ces deux cas il n'existe pas de différentielle quadratique avec pour 2-résidus $(1, 1, 0, \dots, 0)$. Il suffit de montrer qu'une construction avec un graphe d'incidence qui a deux sommets de valence 1 ne fonctionne pas. Il faut distinguer deux cas selon s'il existe un sommet de valence 4 ou deux sommets de valence 3 parmi les pôles de résidu nul.

Le cas avec deux sommets de valence 3 est équivalent au cas cyclique, les longueurs des liens-selles le long du cycle contenu dans le graphe sont λ et μ dans les tronçons découpés par les sommets de valence 3. Les relations $\lambda + \mu = 1$ et $\mu - \lambda = 1$ sont contradictoires et la différentielle ne peut donc pas exister.

Considérons enfin le cas où il y a un unique sommet de valence 4. Le bord du domaine polaire associé possède quatre liens segments consécutifs horizontaux. Deux liens segments correspondent au cycle contenu dans le graphe. Ils ont donc la même longueur et la même orientation, car la différentielle est primitive et que tous les pôles du cycle ont un résidu nul. Les deux autres segments sont nécessairement de longueur 1 et de l'autre orientation. La géométrie de la surface est ainsi entièrement déterminée. Les deux branches contribuent à la même singularité conique. Chaque domaine polaire du cycle ajoute 2π à chaque singularité conique. Enfin, dans le sommet de valence 4, sur l'angle total de 6π , il y a 5π pour la singularité conique à laquelle contribuent les deux branches et π pour l'autre singularité. L'écart d'angle total entre les deux singularités coniques est donc au minimum de 4π . L'écart d'ordre est donc supérieur ou égal à 4. Ainsi, les résidus quadratiques $(1, 1, 0, \dots, 0)$ ne sont pas réalisables dans les strates considérées. C.Q.F.D.

Enfin nous traitons le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $n \geq 3$.

Lemme 4.10. *L'application 2-résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $n \geq 3$ contient $\mathcal{R}_2^0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p) \setminus (0, \dots, 0)$.*

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait par éclatement de zéros. Il suffit donc de montrer que lorsque la strate contient trois zéros d'ordres a_i , l'application 2-résiduelle de cette strate contient le complémentaire de l'origine. Cela est une conséquence immédiate

du lemme 4.9 pour toutes les strates, sauf pour $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p+b-7, 2p+b-7, 2; -b, -b, (-4^{p-2}))$ avec $p \geq 2$.

La figure 18 montre un différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1, 2; -4, -4)$ dont les 2-résidus sont (1, 1). Le cas des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(b-3, b-3, 2; -b, -b)$ s'obtiennent de

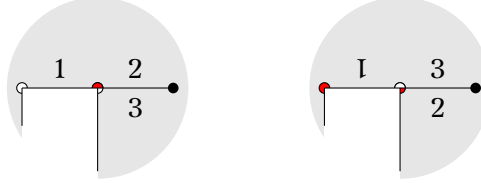


FIGURE 18. Différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1, 2; -4, -4)$ dont les 2-résidus sont (1, 1).

manière similaire en utilisant des 2-parties polaires d'ordres b et de type $b-1$ associés aux mêmes vecteurs que dans la figure 18. Enfin, le cas général se déduit de celui-ci en coupant le long du lien selle noté 1 et en collant de manière cyclique des 2-parties polaires d'ordre 4 associées à (1; 1). C.Q.F.D.

Nous voudrions maintenant comprendre les cas où l'application résiduelle contient l'origine. Le cas d'un pôle a déjà été traité, ainsi nous supposons que le nombre de pôles est supérieur ou égal à deux. Si les différentielles ont $n \geq 3$ zéros cela amène une combinatoire lourde. Nous ne traiterons donc que les strates avec $n \leq 3$. Si $n = 2$ on a le résultat suivant.

Lemme 4.11. *Pour tout $k \geq 2$ et $p \geq 1$ l'image de $\mathfrak{R}_0^k(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ ne contient pas $(0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une k -différentielle ξ_0 dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les k -résidus soient nuls à tous les pôles P_i . Pour tous les $i \in \{1, \dots, p\}$, nous créons une k -différentielle entrelacée de la façon suivante. Si b_i/k est pair, nous collons une k -différentielle ξ_i de genre $g_i = \frac{b_i}{2k}$ avec un unique zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i . Si b_i/k est impair, nous collons une k -différentielle ξ_i de genre $g_i = \frac{b_i+k}{2k}$ avec un zéro d'ordre $b_i - 2k$ au point d'attachement z_i identifié avec P_i et un autre zéro d'ordre k . De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ les k -différentielles ξ_i sont les puissances k ième de différentielles abéliennes holomorphes.

La k -différentielle entrelacée ainsi obtenue est de type $(a_1, a_2, (k^d))$, où d est le nombre de b_i tels que b_i/k est impair. D'après le théorème 1.5 de [BCGGM19] (qui, dans ce cas, est une généralisation directe de la propriété 2.4), cette k -différentielle entrelacée est lissable dans la strate $\mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, (k^d))$, avec $g = \sum_i g_i$.

Dénotons par S le lieu de toutes les k -différentielles entrelacées que nous venons de construire, où ξ_0 et le p -uplet (ξ_1, \dots, ξ_p) sont chacun considérés à multiplication par \mathbb{C}^* près. Le fait que les k -résidus des pôles de ξ_0 soient nuls implique que ξ_0 est uniquement déterminée modulo \mathbb{C}^* . Donc la dimension de S est donnée par

$$-1 + \sum_{i>0, b_i/k \text{ pair}} 2g_i + \sum_{i>0, b_i/k \text{ impair}} (2g_i + 1) = 2g + d - 1,$$

car les k -différentielles ξ_i sont les puissances de différentielles abéliennes holomorphes et le -1 provient du fait que nous considérons le uplet (ξ_1, \dots, ξ_p) modulo multiplication par \mathbb{C}^* .

Remarquons que $\dim \mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, (k^d)) = 2g + d - 1$. Le lieu S a la même dimension que la strate $\mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, (k^d))$. Ainsi, il ne peut pas être au bord de celle-ci. Cela contredit le fait que toutes les k -différentielles de S soient lissables dans $\mathbb{P}\Omega \mathcal{M}_g(a_1, a_2, (k^d))$. C.Q.F.D.

Maintenant nous considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2, a_3; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$. Rappelons la notation $a_i = k\ell_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$. Nous introduisons la notion de *décomposition admissible* de μ qui permet de caractériser les strates qui possèdent une k -différentielle dont tous les k -résidus sont nuls. On commence par choisir un *zéro spécial* parmi les trois zéros tel que s'il existe un zéro d'ordre divisible par k , alors le zéro spécial est ce zéro. Par la suite, nous supposons que le zéro spécial est a_1 . On répartit alors les pôles P_j en quatre ensembles S_0, S_{11}, S_{12} et S_{13} satisfaisant aux propriétés suivantes. On suppose que le cardinal de S_0 est égal à 1 ou 2. Si le cardinal de S_0 est 1, alors $S_{11} = \emptyset$. Pour chaque pôle P_t d'ordre $-k\ell_t$ dans S_{1j} avec $j \neq 1$ on associe un nombre $m_{t,j} \in \{1, \dots, \ell_t - 1\}$. Si le cardinal de S_0 est 1, alors nous associons à ce pôle d'ordre $-k\ell_0$ deux nombres $m_{0,j} \in \{0, \dots, \ell_0 - 2\}$ pour $j \in \{2, 3\}$ tels que $m_{0,2} + m_{0,3} \leq \ell_0 - 2$. Si S_0 contient deux pôles d'ordres respectifs $-k\ell_0$ et $-k\ell'_0$, alors on leur associe un nombre $m_{0,2}$ dans $\{0, \dots, \ell_0 - 2\}$ et un nombre $m_{0,3}$ dans $\{0, \dots, \ell'_0 - 2\}$. Les $m_{\alpha,j}$ forment une *décomposition admissible* de μ si $l_j = \sum_{\alpha} m_{\alpha,j}$ pour $j = 2, 3$. Des strates ayant ou non des décompositions admissibles sont données dans le corollaire 4.13.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.12. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2, a_3; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ une strate de genre zéro non vide telle que $p \geq 2$. L'image de $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$ si et seulement s'il existe une décomposition admissible de μ .*

La preuve de ce lemme est similaire à celle de la condition donnée par l'équation 1.5 dans le cas abélien.

Démonstration. On commence par se donner une décomposition admissible de μ . La k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ dont tous les k -résidus sont nuls est la suivante. S'il y a un unique pôle dans S_0 , nous prenons une k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ où les v_i satisfont les conditions suivantes. On a les égalités $|v_1| = |v_2|$, $|v_3| = |v_4|$, $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$. Les angles à l'intersection de v_1 et v_2 , et de v_3 et v_4 respectivement, sont $\frac{2\pi(k+\bar{a}_i)}{k}$. On coupe cette surface le long des demi-droites partant de ces sommets et on colle un nombre de plans correspondant aux $m_{0,j}$. Puis on procède de même à partir du point d'intersection de v_2 et v_4 avec $\ell_0 - 1 - m_{0,2} - m_{0,3}$ plans. Pour chaque pôle de S_{1j} avec $j \geq 1$, on prend une k -partie polaire d'ordre $k\ell_t$ et de type $m_{t,j}$ associée à $(v_j; v_j)$. Enfin, on obtient la surface voulue en collant les bords par translation et rotation comme dans les preuves précédentes.

Dans le cas où il y a deux pôles dans S_0 , la construction est la suivante. On associe au premier de ces deux pôles une k -partie polaire associée à $(v_1, v_2; v)$ où les v_i sont comme ci-dessus et $v = v_1 + v_2$. On associe au second pôle la k -partie polaire associée à $(v; v_3, v_4)$. Pour les pôles de S_{11} , on prend une k -partie polaire associée à $(v; v)$ et on les recolle de manière cyclique. Le reste de la construction est similaire à celle du paragraphe précédent.

Supposons maintenant qu'il existe une k -différentielle ξ ayant les propriétés souhaitées. Nous construisons une décomposition admissible de μ .

Le point crucial est de montrer qu'il existe deux zéros, disons z_2 et z_3 , de ξ non reliés entre eux par un lien selle. De plus, il n'y a de lien selle fermé contenant ces zéros. On utilise le fait que ξ est obtenu en recollant des k -parties polaires. C'est une conséquence du cas abélien, voir [Boi15, proposition 3.7], et du fait que les surfaces plates associées aux k -différentielles ont des revêtements cycliques correspondant à des différentielles abéliennes. De plus, comme la caractéristique d'Euler de \mathbb{P}^1 est 2, un calcul similaire à celui du lemme 3.6 de [Boi15] implique qu'il y a $p + 1$ liens selles dans cette décomposition, ce qui donne $2p + 2$ segments au bord des parties polaires. Comme le k -résidu des pôles est nul, chaque partie polaire est bordée d'au moins deux segments. Donc soit il existe un unique pôle dont la k -partie polaire est constituée de 4 segments, soit il existe deux pôles bordés par trois segments. Les autres pôles sont eux bordés de deux segments. Supposons maintenant qu'il existe un lien selle entre chaque paire. On peut couper la surface le long de ces liens selles

pour déconnecter la surface. Donc on est dans le cas où deux parties polaires sont bordées de trois segments. De plus, la seule façon de coller les trois segments que nous avons obtenus est par translation. On a donc une différentielle abélienne (car le fait que les k -résidus soient nuls implique que la surface est d'holonomie nulle sur les complémentaires). De plus, cela implique que s'il y a un zéro d'ordre divisible par k , alors il existe une connexion de selle entre ce zéro et chacun des deux autres. En effet, le zéro d'ordre divisible par k correspond à deux sommets non consécutifs des domaines spéciaux. Enfin, on peut facilement vérifier qu'il n'existe pas de lien selle fermé partant et terminant à l'un des deux zéros qui n'ont pas de lien selle entre eux.

La décomposition admissible de μ est alors donnée de la façon suivante. Le zéro spécial est celui qui possède un lien selle vers les deux autres. On a vérifié que si il y a un zéro d'ordre divisible par k , alors c'est le zéro spécial. L'ensemble S_0 est formé des pôles ayant au moins trois segments bordant leurs k -parties polaires. Les ensembles S_{1j} sont constitués des pôles non spéciaux dont le bord de la k -partie polaire est constitué de segments reliant le zéro d'ordre a_1 à celui d'ordre a_j . Enfin, les $m_{t,j}$ correspondent à $\frac{1}{2\pi}$ fois la contribution angulaire du pôle P_t à l'angle du zéro z_j . C.Q.F.D.

Ces conditions ne sont pas systématiquement satisfaites. On peut par exemple déduire sans problèmes le résultat suivant de la proposition 4.12.

Corollaire 4.13. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; (-2k^p))$ une strate de genre zéro telle que $k \mid a_1$. L'origine est dans l'image de l'application k -résiduelle si et seulement si $a_1 \geq kp$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la condition $a_1 \geq kp$ est équivalente à l'existence d'une décomposition admissible de $(a_1, a_2, a_3; (-2k^p))$. Rappelons la notation $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ et que dans ce cas $\ell_j = 2$. Notons que dans ce cas le zéro spécial est le zéro d'ordre a_1 . De plus, un calcul élémentaire donne

$$l_1 + l_2 + l_3 = 2p - 1. \quad (4.2)$$

Supposons que la condition $l_1 \geq p$ soit satisfaite et construisons une décomposition admissible. Si $l_1 = p$, alors S_0 contient un pôle, S_{12} contient l_2 pôles et S_{13} en contient l_3 (ce qui est possible par l'équation (4.2)). Dans ce cas $m_{0,2} = m_{0,3} = 0$ et tous les autres $m_{t,j}$ sont égaux à 1. Cela forme donc une décomposition admissible. Si $l_1 > p$, alors S_0 contient deux pôles, S_{11} contient $l_1 - p - 1$ pôles, S_{12} contient l_2 pôles et S_{13} en contient l_3 . On vérifie que les $m_{t,j}$ ne peuvent être choisis que de manière unique et que cela donne une décomposition admissible.

Réciproquement, supposons une décomposition admissible de $(a_1, a_2, a_3; (-2k^p))$. On vérifie facilement que par définition $m_{0,j} = 0$ pour $j = 2, 3$ et que $m_{t,j} \in \{0, 1\}$ pour $t \geq 1$ et $j = 2, 3$. On a donc

$$l_2 + l_3 = \sum_{\alpha} m_{\alpha,2} + \sum_{\alpha} m_{\alpha,3} \leq p - 1.$$

Le fait que $l_1 \geq p$ est alors une conséquence de l'équation (4.2). C.Q.F.D.

4.3. Les strates avec $r = 0$, $p \neq 0$ et $s \neq 0$. Cette section est dédiée à la preuve du théorème 1.9, i.e. aux strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-k^s))$ avec $p \neq 0$ et $s \neq 0$. Rappelons que dans toute cette section, nous ne considérons que les strates non vide. D'après le lemme 4.1, cela revient à supposer que $\text{pgcd}(a_i, k) = 1$. Enfin nous dénotons tout au long de cette section $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

On commence par traiter les cas des strates exceptionnelles suivantes.

Lemme 4.14. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ ne contient pas $\mathbf{C}^* \cdot (0, 1, \dots, 1)$.*

L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ avec $a \geq 0$ ne contient pas $\mathbf{C}^ \cdot (0, \dots, 0, 1, 1)$.*

Démonstration. Supposons qu'une différentielle ξ_0 de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ possède les résidus quadratiques $(0, 1, \dots, 1)$. Nous formons alors une différentielle entrelacée en attachant une courbe elliptique munie d'une différentielle quadratique holomorphe au pôle d'ordre -4 de ξ_0 . Cette différentielle quadratique entrelacée peut être lissée sans modifier les résidus aux pôles doubles d'après le lemme 2.4. Cela aboutit à une contradiction avec le lemme 5.12 où nous montrons (évidemment sans utiliser ce résultat) que les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'}))$ ne possèdent pas de différentielle avec résidu quadratique égal à un à tous les pôles.

Le second cas se traite de manière similaire. Si $a \geq 1$ nous utilisons le lemme 5.6 disant que les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$ ne contiennent pas de différentielle quadratique dont les résidus quadratique sont $(0, \dots, 0)$. Si $a = 0$, nous utilisons le fait classique que la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$ est vide. La contradiction s'obtient en considérant la différentielle entrelacée obtenue en collant ensemble les deux pôles d'ordre -2 d'une 2-différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$. C.Q.F.D.

Nous considérons maintenant le cas des strates ayant à la fois des pôles d'ordres $-k$ et des pôles d'ordres inférieurs divisibles par k .

Lemme 4.15. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k)$ avec $\ell \geq 2$ sont surjectives.*

Démonstration. Nous traitons tout d'abord le cas où $\ell = 2$. Soit il existe a_i , disons a_1 tel que $-k < a_1 < 0$, soit on a $0 < a_1, a_2 < k$. On dénote le k -résidu R , resp. R_1 , au pôle d'ordre $-2k$, resp. $-k$. Quitte à multiplier les k -résidus par une constante, on peut supposer que $R_1 = 1$ et on considérera la racine $r_1 = 1$ de R_1 . Les trois cas ci-dessous sont représentés dans la figure 19.

Dans le cas où $-k < a_1 < 0$, on associe au pôle d'ordre $-2k$ la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; r_1)$ telle que l'angle au point d'intersection de la concaténation des v_i soit $2\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$ et que la longueur des v_i soit identique et $v_1 + v_2 - r_1$ est égale à une racine de R dont la partie réelle est positive. On colle alors au segment r_1 une k -partie polaire d'ordre k associée à r_1 et les v_i ensemble. La surface obtenue vérifie clairement les propriétés souhaitées.

Dans le cas où $0 < a_1, a_2 < k$ la construction est la suivante. Si $|R| > 1$ on considère la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(\emptyset; v_1, r_1, v_2)$ telle que les v_i soient d'égale longueur, la somme des angles aux sommets au bord de r_1 égale à $\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$ et la somme est l'opposée d'une racine de R de partie réelle négative. On colle alors au segment r_1 une k -partie polaire d'ordre k associée à r_1 et les v_i ensemble. La surface obtenue vérifie clairement les propriétés souhaitées.

Si $|R| \leq 1$, on considère la k -partie polaire d'ordre k associée à (v_1, v_2) avec $v_1 + v_2 = 1$ et $-\exp\left(\frac{2a_1 i\pi}{k}\right)v_2 - a$ est une racine de R . On vérifie facilement que l'on peut choisir une racine de R de telle façon que cette équation possède une solution avec v_1 de partie imaginaire strictement négative ou dans le segment $]0, 1[$. On considère la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(-\exp\left(\frac{2a_1 i\pi}{k}\right)v_2; v_1)$. En collant les v_i entre eux par rotations et translations on obtient une surface plate ayant les invariants souhaités.

Nous traitons maintenant le cas où $\ell \geq 3$. On part d'une surface plate ayant les k -résidus souhaités dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -2\ell; -k)$ telle que $a_i = a'_i + l'_i k$ avec $l'_i \geq 0$. On coupe alors une demi-droite partant du zéro d'ordre a'_i et on colle de manière cyclique l'_i plans possédant la même fente. C.Q.F.D.

Nous déterminons maintenant l'image de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$.

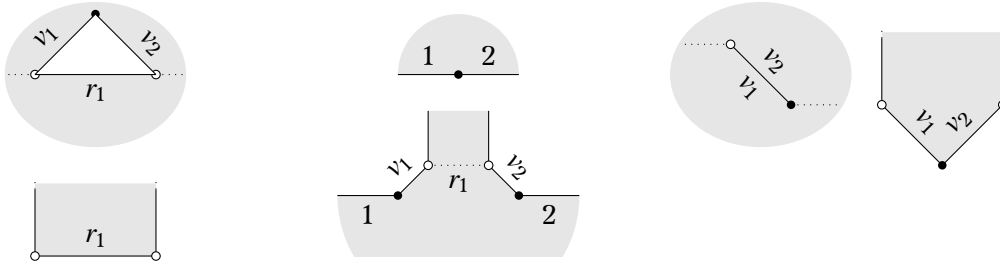


FIGURE 19. Différentielles quartiques dans $\Omega^4\mathcal{M}_0(-1, 5; -8; -4)$ à gauche et dans $\Omega^4\mathcal{M}_0(1, 3; -8; -4)$ au centre et à droite. Les résidus quartiques sont respectivement $(0, 1)$, $(16, 1)$ et $(0, 1)$.

Lemme 4.16. *L'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(3, 1; -4, -2, -2)$ contient $\mathcal{R}_0^k(3, 1; -4, -2, -2) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0, 1, 1)$. Les applications résiduelles des autres strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$ sont surjectives pour tout $\ell \geq 2$.*

Démonstration. Nous commençons par traiter le cas $\ell = 2$. Dans le cas où l'un des zéros d'ordre $-k < a_i < 0$, la construction est identique à celle du lemme 4.15 et nous laissons les modifications triviales au lecteur. Nous nous concentrerons donc sur le cas où $0 < a_2 < k < a_1 < 2k$. Dans ce cas, nous séparons les cas où $R_1 \neq (-1)^k R_2$ et $R_1 = (-1)^k R_2$.

Dans le premier cas nous supposons que $|R_1| \geq |R_2|$. Nous commençons par choisir des racines r_i telles que r_1 , resp r_2 , est de partie réelle négative, resp. positive (ou de partie imaginaire négative, resp. positive, si la partie réelle est nulle). Nous prenons une k -partie polaire d'ordre $-2k$ associée à $(-r_1; v_1, r_2, \alpha v_1)$ telle que $\alpha = \exp((2a_1 - k)\pi/k)$ et la somme $r_1 + v_1 + r_2 + \alpha v_1$ est égale à l'opposé d'une racine r de R . La solution de cette équation est $v_1 = -\frac{r+r_1+r_2}{1+\alpha}$. On peut clairement choisir r telle que la concaténation de v_1 avec r_2 et αv_1 soit sans point d'intersection. La surface avec les invariants souhaités s'obtient alors en collant les segments v_i entre eux et des k -parties polaires d'ordre k associées à r_i aux segments correspondants.

Dans le cas où $R_1 = (-1)^k R_2$ et que $R \neq 0$ la même construction que précédemment donne la k -différentielle souhaitée. Il reste donc à traiter le cas des k -résidus égaux à $(0; 1, (-1)^k)$ dans $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$ avec $0 < a_2 < k < a_1 < 2k$ pour $k \geq 3$. Dans les cas $(a_1, a_2) \neq (k+1, k-1)$, la construction est similaire à la construction du paragraphe précédent. Nous prenons une k -partie polaire d'ordre $-2k$ associée à $(-r_1; v_1, 1, \alpha v_1)$ telle que $\alpha = \exp((2a_1 - k)i\pi/k)$, la racine r_1 est égale respectivement à $\exp(2i\pi/k)$ si k est pair et $\exp(i\pi/k)$ si k est impair et tels que $1 + v_1 + r_1 + \alpha v_1 = 0$. On a alors $v_1 = \frac{1+r_1}{1+\alpha}$ et on peut vérifier que la concaténation de v_1 avec 1 et αv_1 est sans point d'intersection. On peut alors conclure la construction comme précédemment. Enfin, dans le cas où $(a_1, a_2) = (k+1, k-1)$, on procède à la construction analogue avec la k -partie polaire d'ordre $-2k$ associée à $(\exp(2i\pi/k), 1; \exp(2i\pi/k), 1)$. On colle par rotation l'un des segments 1 à l'un des segments $\exp(2i\pi/k)$ et des demi-cylindres infinis aux autres segments. On vérifiera alors facilement que la différentielle obtenue possède les invariants souhaités.

Pour montrer la surjectivité des applications résiduelles $\mathcal{R}_0^k(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$, on peut essentiellement procéder comme dans le cas de la preuve du lemme 4.15. En effet, on peut obtenir toutes les strates de la forme $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$, sauf dans le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(3, 3; -6; -2, -2)$, en ajoutant un multiple de k aux zéros des strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; -k, -k)$ dont l'application k -résiduelle est surjective. On peut alors couper les surfaces obtenues aux paragraphes précédents appartenant à $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; -k, -k)$ et recoller $\ell - 2$ plans de manière à obtenir les ordres souhaités. De plus, cette technique donne que l'image de $\mathcal{R}_0^2(3, 3; -6; -2, -2)$ contient $\mathcal{R}_0^2(3, 3; -6, -2, -2) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0, 1, 1)$. Une différentielle

quadratique ayant ces ordres et dont les k -résidus sont $(0, 1, 1)$ est représentée dans la figure 20. C.Q.F.D.

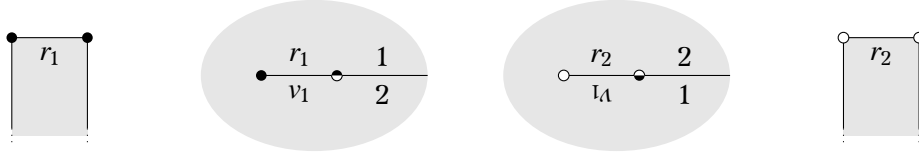


FIGURE 20. Une différentielle quadratique dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(3, 3; -6; -2, -2)$ dont les résidus quadratiques sont $(0; 1, 1)$.

Nous considérons maintenant le cas des strates ayant un unique pôle d'ordre $-k\ell$ et un nombre arbitraire de pôles d'ordre $-k$.

Lemme 4.17. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; (-k^s))$ avec $s \neq 3$ distinctes des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s = 2s'$ sont surjectives. L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s = 2s'$ contient le complémentaire de $\mathbf{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$ dans l'espace résiduel.*

Démonstration. Ce cas est similaire aux cas des lemmes 4.15 et 4.16. Nous soulignerons les spécificités et laisserons les détails au lecteur. Nous traiterons le cas $\ell = 2$, le cas $\ell \geq 3$ s'obtenant comme dans ces deux lemmes. Rappelons que nous noterons $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i < 0$ et $l_1 + l_2 = s + 1$.

Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2k; (-k^s))$ une strate avec $s \neq 3$ impair. Si $a_2 < 0$, alors on considère la partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, \alpha v_1; r_1, \dots, r_s)$ où les r_i sont des racines des R_i de partie réelles positives, le coefficient $\alpha = \exp\left(\frac{r_1}{k}\right)$ et la somme $\sum r_i - (1 + \alpha)v_1$ égale à une racine r du k -résidu R au pôle d'ordre $-2k$. Puis on fait les collages similaire à ceux des lemmes précédents. Dans le cas où $a_2 > 0$ (et donc $l_2 > 0$), on partitionne les k -résidus en deux ensembles $S_1 \sqcup S_2$ de cardinaux l_1 et $l_2 - 1$ satisfaisant aux conditions suivantes. Nous notons par R_i le k -résidu d'un pôle d'ordre $-k$ appartenant à S_1 si $i \leq l_1$ et à S_2 si $i > l_1$. Pour les pôles de S_2 on choisit une racine de leurs k -résidus que l'on notera r_i pour $i \geq l_1$. De plus, le choix de la partition et des racines des k -résidus est fait de façon à ce que $s_2 := r + \sum_{i \geq l_1} r_i$ soit de norme maximale. Quitte à multiplier tout les k -résidus par une constante, on peut supposer que $s_2 \in \mathbf{R}_+$. Ensuite, on choisit une racine r_i pour $1 \leq i < l_1$ pour chacun des k -résidus aux pôles de S_1 de façon à ce que la somme $s_1 := \sum_{1 \leq i \leq l_1} -r_i$ soit de norme maximale et pour cette norme, d'argument minimal. Comme $l_1 - 1 < l_2$ on a $|s_1| < |s_2|$. Notons v_1 et v_2 deux segments d'égale longueur, tels que l'angle au dessus de leur intersection est égal à $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$ et de somme $s_2 - s_1$. Il suffit alors de prendre la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, -r_1, \dots, -r_{l_1}, v_2; r_{l_1+1}, \dots, r_s)$. Puis on identifie les deux segments v_i ensemble par rotation (et translation) et on colle des demi-cylindres infinis aux autres segments. Par construction, cette k -différentielle possède les invariants locaux souhaités.

Dans le cas d'une strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2k; (-k^s))$ avec $s \geq 3$ pair, les constructions sont similaires à l'exception d'un cas. Celui des strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(\frac{sk}{2} - 1, \frac{sk}{2} + 1; -2k; (-k^s))$ avec des k -résidus sont de la forme $(0; (1^{s/2}), (-1^{s/2}))$ si k est impair et $(0; (1^s))$. On se concentre donc sur ce cas dans le reste de la preuve, des représentations pour $k = 3$ et $k = 4$ sont données dans la figure 21. Dans le cas pair, nous considérons la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $((1^{s/2}); (v_1, (1^{\lceil s/2 \rceil}), (-1^{\lfloor s/2 \rfloor}), v_2))$ avec les conditions similaires à précédemment. Notons que comme $k > 2$ la partie imaginaire de v_1 est strictement négative et celle de v_2 strictement positive, cette partie polaire est bien définie. On procède alors aux collages comme précédemment. Enfin, le cas avec k impair est similaire : nous considérons la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $((1^{\lceil s/4 \rceil}), (v^{\lfloor s/4 \rfloor}); (v_1, (1^{\lceil s/4 \rceil} - 1), w, -w, (v^{\lfloor s/4 \rfloor} - 1), v_2))$

avec $v = \exp\left(\frac{i\pi}{k}\right)$, $w = \exp\left(\frac{-i\pi}{k}\right)$, $v_1 = 1$ et $v_2 = v$. Les collages sont ensuite similaires à ceux des cas précédents. C.Q.F.D.

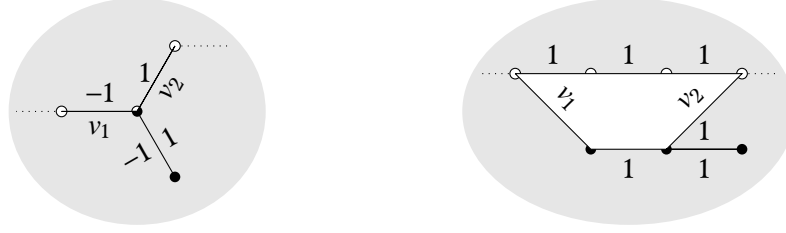


FIGURE 21. Les k -parties polaires d'ordre $2k$ utilisés pour construire une différentielle cubique de type $(5, 7; -6; (-3^4))$ dont les 3-résidus sont $(0; 1, 1, -1, -1)$ à gauche et une différentielle quartique de type $(9, 7; -8; (-4^6))$ dont les 4-résidus sont $(0; (1^6))$ à droite.

Enfin nous traitons le cas général avec deux zéros.

Lemme 4.18. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ avec $p \geq 2$ et $s \neq 0$ distinctes des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1; 2a+1; (-4^a); (-2^2))$ sont surjectives. L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1; 2a+1; (-4^a); (-2^2))$ contient le complémentaire de $\mathbb{C}^* \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$ dans l'espace résiduel.*

Démonstration. Nous commençons en supposant que tous les k -résidus aux pôles P_i d'ordres $-k\ell_i$ sont distincts de zéro. Avec la notation usuelle $a_i = k\ell_i + \bar{a}_i$, on a $l_1 + l_2 + 1 = s + \sum_{i=1}^p \ell_i$. On déduit du fait que $s \geq 1$ et $p \geq 2$ qu'il existe un ℓ_i tel que $\ell_i \leq \max\{l_1, l_2\}$. Par récurrence et quitte à permuter les indices, on peut partitionner les pôles en trois ensembles $E_0 = \{P_1\}$, $E_1 = \{P_2, \dots, P_t\}$ et $E_2 = \{P_{t+1}, \dots, P_p\}$ tels que $\sum_{i=2}^t \ell_i \leq l_1$ et $\sum_{i=t+1}^p \ell_i \leq l_2$. On fait alors une construction similaire à celles des lemmes 4.15, 4.16 et 4.17. Plus précisément, dans le cas où $l_1 = 0$, la construction est la même. Dans le cas où $l_1, l_2 \neq 0$, on considère les constructions précédentes avec les racines des k -résidus des pôles de E_1 avec $l_1 - \sum_{i=2}^t \ell_i - 1$ racines des k -résidus des pôles d'ordre $-k$ d'une part et les racines des éléments de E_2 et des autres pôles d'ordre $-k$ pour l'inférieur d'autre part. Cette construction fonctionne toujours car le k -résidu au pôle d'ordre $-k\ell_1$ est non nul.

Supposons maintenant qu'il existe des pôles, disons P_1, \dots, P_t dont les k -résidus soient non nuls et des pôles, P_{t+1}, \dots, P_p dont les k -résidus soient non nuls. Nous considérons alors la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ où $a'_1 = \max\{a_1 - q + t, 0\} a_1$. Nous venons de montrer que l'application k -résiduelle de ces strates est surjective. Donc nous prenons une k -différentielle ξ dans cette strate avec les invariants locaux souhaités. Par notre construction, nous savons qu'il existe un lien selle v entre les deux zéros et un lien selle fermé w commençant et terminant au zéro d'ordre maximal. La k -différentielle est obtenue en coupant ξ le long de v et w . Puis en collant à v cycliquement $(a_1 - a'_1)$ k -parties polaires triviales d'ordres $-k\ell_i$ de type 1 associées à l'holonomie de v . Et en collant les k -parties polaires restantes à w de manière cyclique.

Enfin nous supposons que tous les k -résidus aux pôles d'ordres $-k\ell_i$ soient nuls. Pour cela nous procédons comme dans le cas précédent en considérant la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -k\ell_1; (-k^s))$ où ℓ_1 est maximal parmi les ℓ_i et $a'_1 = \max\{a_1 - q + t, 0\} a_1$. Si l'application k -résiduelle de cette strate est surjective, alors on obtient les k -différentielles avec les invariants souhaités. Pour conclure, il reste à considérer les cas où l'application k -résiduelle de la strate obtenue n'est pas surjective. Notons que dans ce cas $\ell_i = 2$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Supposons que nous obtenions $\Omega^k \mathcal{M}_0(k-1, k+1; -2k; -k, -k)$ avec $k \geq 3$. Dans ce cas, nous pouvons faire la construction de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(2k-1, 1; -2k; -k, -k)$ ne soustrayant pas 1 à a_1 et a_2 mais 2 au zéro d'ordre $k+1$ à la fin de la procédure. Enfin il reste à traiter le cas où nous

obtenons une strate de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ avec $s' \geq 2$. Dans ce cas, on fait comme précédemment à la différence que nous retirons 2 au zéro qui donne l'ordre minimal. Pour que la construction géométrique soit possible il suffit alors qu'il existe un lien selle fermé contenant le zéro d'ordre $2s' - 3$ pour toutes les différentielles de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 3, 2s' + 3; -4; (-2^{2s'}))$. Mais comme $2s' - 3 \geq 1$, cette singularité borde au moins une partie polaire d'ordre k . Grâce à l'existence de ce lien selle, on conclut la preuve avec la construction précédente. C.Q.F.D.

Enfin, nous traitons le cas des strates avec $n \geq 3$ zéros.

Lemme 4.19. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -kl_1, \dots, -kl_p; (-k^s))$ avec $s \geq 1$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. La preuve se fait par éclatement de zéros. Dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir une k -différentielle dans une strate en éclatant un zéro d'une k -différentielle primitive. Toutefois, grâce à la multiplicativité des k -résidus (équation (2.1)) il suffit de vérifier que l'on peut partir d'une strate dont les éléments ne sont pas la puissance k ème de différentielles abéliennes. Cela revient à vérifier que l'on peut additionner deux a_i de telle façon que la somme ne soit pas divisible par k . Nous laissons le lecteur vérifier cette propriété élémentaire. On obtient donc la surjectivité de l'application résiduelle de toutes les strates distinctes de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -4; (-2^{2s'}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-4^a); (-2^2))$, en combinant l'éclatement des zéros avec les résultats précédents de cette section..

Considérons les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -4; (-2^{2s'}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-4^a); (-2^2))$. Il suffit de montrer la surjectivité pour toutes les strates telles que $n = 3$ puis d'éclater les zéros. Un calcul élémentaire montre que si (a_1, a_2, a_3) est respectivement distinct de $(2, 2s' - 1, 2s' - 1)$ et $(2, 2a - 1, 2a - 1)$, alors on peut additionner deux a_i de telle façon que les ordres obtenus ne soit pas ceux d'une strate exceptionnelle et qu'un ordre soit impaire. Il suffit donc de montrer que l'application 2-résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 2s' - 1, 2s' - 1; -4; (-2^{2s'}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 2a - 1, 2a - 1; (-4^a); (-2^2))$ contient respectivement $(0; 1, \dots, 1)$ et $(0, \dots, 0; 1, 1)$. La figure 22 donne une telle différentielle quadratique avec ces invariants locaux pour $s' = a = 1$ et $a = 2$.

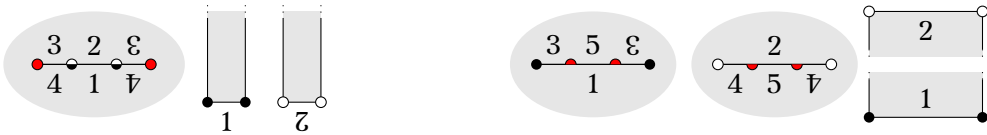


FIGURE 22. Deux différentielles quadratiques dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 1, 1; -4; -2, -2)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 3, 3; -4, -4; -2, -2)$ dont les 2-résidus sont respectivement $(0; 1, 1)$ et $(0, 0; 1, 1)$.

Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 2s' - 1, 2s' - 1; -4; (-2^{2s'}))$ on procède à la construction suivante. Soit $v \in \mathbb{C}^*$, on associe aux pôles d'ordres -2 les 2-parties polaires d'ordre 2 associées à (v) . Pour le pôle d'ordre -4 , on associe la 2-partie polaire d'ordre 4 associée à $((v^{s'+2}); (v^{s'+2}))$. La différentielle quadratique est obtenue en collant par rotation d'angle π les premiers vecteur v de la 2-partie polaire d'ordre 4 aux derniers et les autres aux bords des 2-parties polaires d'ordre 2. Cette construction est représentée à gauche de la figure 22.

Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2, 2a - 1, 2a - 1; (-4^a); (-2^2))$ on considère deux cas selon la parité de a . Si a est impair, on note v l'holonomie des liens selles v_1 et v_2 labellisés par 1 et 2 dans la différentielle quadratique η représentée à gauche de la figure 22. On associe à $a - 1$ pôles d'ordre -4 la 2-partie polaire d'ordre 4 associée à $(v; v)$. Puis, on coupe η le long des liens selles v_1 et v_2 . Puis on colle cycliquement par translation $(a - 1)/2$ des 2-parties polaires, respectivement aux segments obtenus en coupant les liens selles v_1 et v_2 . Si a est

pair, on procède de manière similaire en partant de la différentielle quadratique à droite de la figure 22. C.Q.F.D.

4.4. k -différentielles dont les pôles sont d'ordre $-k$. Ce cas est, comme dans le cas abélien, assez subtil. En particulier, le cas quadratique possède de nombreuses différences avec le cas des k -différentielles pour $k \geq 3$. C'est pourquoi nous présentons d'abord quelques généralités communes à tous les cas. Puis nous traitons le cas des différentielles quadratiques. Enfin nous étudierons le cas des k -différentielles pour $k \geq 3$.

4.4.1. Généralités. Dans les strates ayant un unique zéro, toutes les singularités ont un ordre divisible par k . Elles ne sont donc pas primitives (lemme 4.1). Nous nous concentrerons sur le cas des strates avec deux zéros. Le cas des strates avec plus de zéros se traiteront par éclatement.

Nous notons S la surface plate associée à une k -différentielle ξ d'une strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2; (-k^s))$ et dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) . Nous supposons que les $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ vérifient $-k < \bar{a}_1 \leq -k/2 \leq \bar{a}_2 < 0$. Remarquons que la condition $\text{pgcd}(a_1, a_2, k) = 1$ implique que le cas $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = -k/2$ est possible si et seulement si $k = 2$. De plus, on a l'égalité $l_1 + l_2 + 1 = s$.

Nous présentons un procédé de construction de k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ qui sera très utile. Soit $E = (r_1, \dots, r_s)$ un s -uplet formé de racines k ième des R_i , on va construire \mathcal{G} un $s + 2$ -gone qui a pour arêtes les r_i et deux vecteurs non nuls v_1, v_2 avec $v_2 = \zeta v_1$ pour une racine k ième primitive de l'unité α . Les arêtes v_i partitionnent les r_i en deux uplets E_1 et E_2 de cardinaux respectifs $e_i \in \{0, \dots, s\}$. Par définition le polygone \mathcal{G} est la concaténation de $v_1, r_1, \dots, r_{e_1}, v_2, r_{e_1+1}, \dots, r_s$ dans cet ordre (si $e_1 = 0$, alors v_2 suit directement v_1). Enfin nous supposons que le vecteur normal n_{v_1} à v_1 pointant vers l'extérieur de \mathcal{G} est tel que (n_{v_1}, v_1) forme une base directe. Nous supposons que l'un des deux cas suivant est satisfait.

(C1) On a $e_1 = l_1$ et $e_2 = l_2 + 1$ et $\zeta = \exp((k - 2a_1)i\pi/k)$.

(C2) On a $e_1 = l_1 + 1$ et $e_2 = l_2$ et $\zeta = \exp((2a_1 - k)i\pi/k)$.

La construction (Ci) désigne le fait de prendre un polygone de type (Ci) et de former une k -différentielle en collant les deux segments v_i par rotation et des demi-cylindres infinis aux segments r_i . On vérifiera facilement que la k -différentielle ainsi obtenue est de type μ et que les k -résidus aux pôles d'ordre $-k$ sont les R_i . Les deux cas sont illustrés par la figure 23, où les segments t_1 sont tracés normalement, les r_i sont en segments hachés et les demi-cylindres sont pointillés.

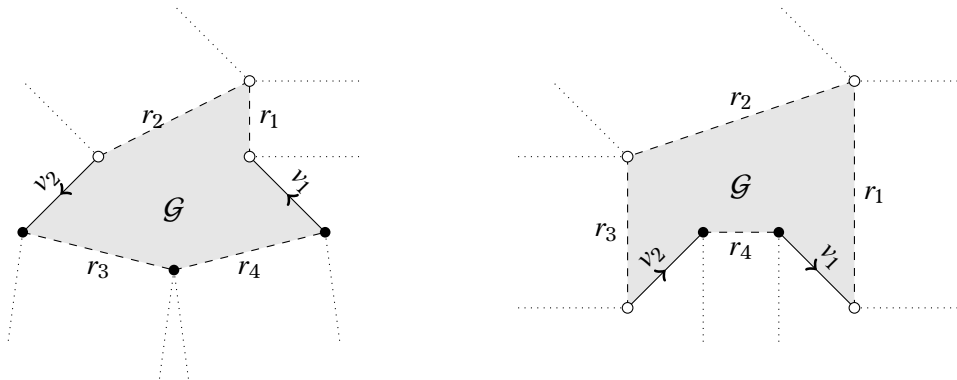


FIGURE 23. Les constructions (C1) à gauche et (C2) à droite sont illustrées dans le cas de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(5, 3; (-4^4))$.

En général, un tel polygone \mathcal{G} n'existe pas et les constructions (Ci) ne sont pas possibles. Nous donnons maintenant une condition suffisante (non nécessaire) sur l'existence de \mathcal{G} , ce

qui implique l'existence de k -différentielles correspondantes. Nous commençons par le cas où $-k < a_2 < 0$ (en particulier on a $-k/2 \leq a_2 < 0$).

Lemme 4.20. Soit (R_1, \dots, R_s) un s -uplet de nombres complexes non nuls et r_i une racine k ème de R_i . Si la somme $t := \sum_{i \neq 1} r_i$ satisfait les propriétés suivantes :

- i) $0 < |t| \leq |r_1|$,
- ii) $t \neq \zeta r_1$ pour toutes les racines k ème de l'unité ζ ,
- iii) si $s \geq 3$, alors les r_i ne sont pas tous colinéaires pour $i \geq 2$,

alors il existe une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ avec $-k/2 \leq a_2 < 0$ dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

Démonstration. Considérons des racines r_i de R_i satisfaisants aux conditions du lemme 4.20. Nous construisons un polygone de type (Ci) de la façon suivante. Quitte à multiplier les R_i par un complexe non nul et les r_i par une racine k ème de l'unité, nous pouvons supposer que r_1 est réel positif et que l'argument de t appartient à $[-\frac{2\pi}{k}, 0[$. Pour $i \geq 2$, prenons les arguments des r_i dans $[-\pi, \pi[$ et rangeons les r_i par argument croissant. Nous construisons un polygone intermédiaire en concaténant les r_i depuis l'origine jusqu'au point final t dans cet ordre. Puis nous relierons les points t à r_1 par deux segments v_1 et v_2 d'égale longueur qui font un angle $\alpha = (a_2 + k)\frac{2\pi}{k}$ (voir la figure 24 pour lequel des deux angles à leur intersection est α). On supposera que v_1 part de t et v_2 termine en r_1 . Le segment v_1 peut couper le segment r_1 , mais comme l'argument de t appartient à $[-\frac{2\pi}{k}, 0[$ ni v_1 ni v_2 ne rencontrent d'autres arêtes ou un sommet du polygone.

Si v_1 ne rencontrent pas r_1 , alors le polygone obtenue est de type (C2) (voir la figure 24 à gauche). Si v_1 coupe r_1 , le polygone de type (C1) est obtenu en concaténant v_1 puis $-r_1$, v_2 et enfin les r_i pour $i \geq 2$ (voir la figure 24 au centre ou à droite). Notons que le point (iii) implique que ce polygone n'est pas dégénéré. Les construction (Ci) permettent d'obtenir la k -différentielle souhaitée. C.Q.F.D.

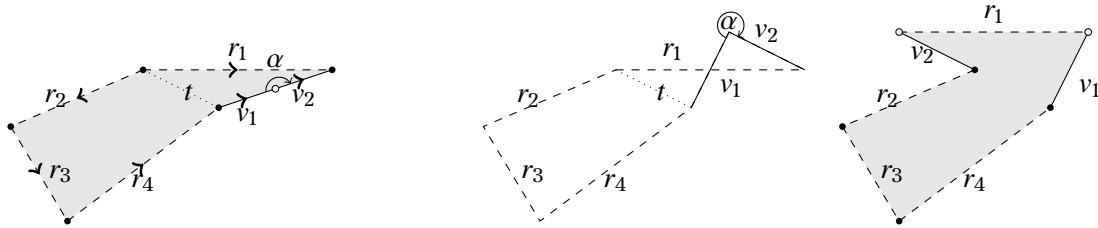


FIGURE 24. La construction du lemme 4.20 lorsque le segment v_1 ne rencontre pas r_1 à gauche et lorsqu'ils s'intersectent au centre et à droite.

Nous donnons l'analogie du lemme 4.20 pour les strates dont les zéros sont d'ordres a_i positifs. De plus, nous nous restreindrons au cas $k \geq 3$.

Lemme 4.21. Soient $S := \Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ une strate de genre zéro, $(R_1, \dots, R_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ et des racines k ème r_i de R_i . S'il existe deux sommes $s_1 := \sum_{i \leq l_1} r_i$ et $s_2 := \sum_{i > l_1} r_i$ telles que

- i) $0 < |s_1| < q|s_2|$, avec $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $k \geq 4$ et $q = \frac{1}{2}$ pour $k = 3$,
- ii) les r_i ne sont pas tous colinéaires dans le cas $s \geq 3$,

alors il existe une différentielle dans la strate S telle que les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

Démonstration. La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 4.20. Nous montrons que sous les hypothèses de ce lemme, on peut construire une k -différentielle via un polygone de type (C1). Prenons les $l_2 + 1$ racines r_i de somme s_2 (que nous supposons réelle positive). Prenons l'argument de ces racines dans $[-\pi, \pi[$ et concaténons les r_i par argument

décroissant. Maintenant si k est pair, on concatène les r_i de s_1 par argument croissant. Si k est impair, on concatène les segments $\zeta_{2k} r_i$ pour ζ_{2k} une racine $2k$ -ième primitive de l'unité. Quitte à multiplier tous les r_i pour $i \leq l_1$ par une même racine k ième de l'unité, l'argument de s_1 appartient au segment $\left[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right]$.

On définit alors les segments v_1 et v_2 de la façon suivante. On relie le point initial de la concaténation de s_2 au point initial de s_1 par v_1 et les finaux entre eux par v_2 tel que ces segments satisfont les conditions suivantes. Ils sont d'égale longueur et la somme des angles du polygone où les v_i rencontrent les segments de s_2 est $2\pi + \frac{2\tilde{a}_1\pi}{k}$. Les conditions (i) et (ii) impliquent que le polygone ainsi obtenu est non dégénéré. En effet, la condition (ii) implique que la concaténation des racines est non dégénérée et la condition (i) implique que la partie imaginaire des segments v_i est strictement positive. Cela implique que le polygone est non dégénéré. On conclut alors par la construction (C1). C.Q.F.D.

Pour terminer ce paragraphe, nous voudrions insister sur le fait que les constructions ci-dessus ne sont pas les seules pour obtenir de telles k -différentielles. Toutefois, elles permettent de construire la majorité de celles-ci.

4.4.2. Les strates quadratiques. Dans ce paragraphe, nous regardons l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $a_i \geq -1$ et au moins deux a_i sont impairs. Nous considérons pour commencer le cas de deux zéros.

Dans ce cas, il existe deux familles de strates spéciales données dans le lemme suivant. Rappelons que trois nombres sont triangulaires s'ils sont le carré de nombres de somme nulle (voir définition 1.12).

Lemme 4.22. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'+2}))$ ne contient pas les résidus quadratiques de la forme $(1, \dots, 1, R, R)$ avec $R \in \mathbb{C}^*$.*

L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ ne contient pas les résidus quadratiques de la forme $(R_1, \dots, R_1, R_2, R_3)$ où R_1, R_2, R_3 sont triangulaires.

Démonstration. Supposons qu'il existe une 2-différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 1, 2s + 1; (-2^{2s+2}))$ dont les 2-résidus sont $(1, \dots, 1, R, R)$. On obtient une 2-différentielle entrelacée lissable en collant les deux pôles ayant pour résidu quadratique R . Comme elle est lissable sans modifier les autres résidus (voir lemme 2.3), on obtient une 2-différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$. Or nous montrerons qu'une telle différentielle quadratique n'existe pas dans le lemme 5.12, ce qui donne une contradiction.

Nous traitons maintenant le cas où les résidus quadratiques sont triangulaires dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$. Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ avec ces invariants locaux. On a alors

$$\xi = \frac{z}{(z-1)^2(z-a)^2(z-b)^2} (dz)^2,$$

avec $a \neq b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et

$$R_1 = \frac{1}{(1-a)^2(1-b)^2}, \quad R_2 = \frac{a}{(1-a)^2(a-b)^2}, \quad \text{et} \quad R_3 = \frac{b}{(1-b)^2(a-b)^2}.$$

En notant par α et β une racine de a et b respectivement, la condition de triangularité donne

$$\pm(\alpha^2 - \beta^2) \pm \alpha(\beta - 1) \pm \beta(\alpha - 1) = 0.$$

Un calcul élémentaire montre que cette équation est équivalente à

$$\pm(\alpha \pm \beta)(\beta \pm 1)(1 \pm \alpha) = 0.$$

On en déduit que $a = b$ ou $a = 1$ ou $b = 1$ ce qui n'est pas permis.

Supposons qu'il existe une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s' \geq 2$ dont les 2-résidus sont $((R_1^{2s'-1}), R_2, R_3)$. Remarquons que soient tous les domaines polaires associés aux pôles dont les 2-résidus sont égaux à R_1 sont bordés par les

deux zéros, soit il existe des domaines polaires bordés par chacun des deux zéros. Dans le premier cas il existe deux domaines polaires qui sont de part et d'autre d'un lien selle reliant les deux zéros. Une 2-différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 3, 2s' - 3; (-2^{2s'-1}))$ dont les 2-résidus sont $((R_1^{2s'-3}), R_2, R_3)$ est obtenue en coupant la surfaces le long des bords de ces domaines polaires, supprimant ces deux pôles puis recollant les bords de la surface obtenue par translation. Dans le second cas on a un lien selle qui relie le zéro au bord d'un domaine polaire à l'autre zéro au bord de l'autre domaine polaire. Il existe donc un cylindre qui relie ces deux domaines polaires. On obtient une 2-différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 3, 2s' - 3; (-2^{2s'-1}))$ dont les 2-résidus sont $((R_1^{2s'-3}), R_2, R_3)$ en coupant cette surface le long du cylindre et en recollant les bords de la surface obtenue. De cette façon on obtient par récurrence une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ dont les 2-résidus sont (R_1, R_2, R_3) . C.Q.F.D.

Nous montrons maintenant que ces cas sont très spéciaux.

Lemme 4.23. *Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ une strate quadratique. L'image par l'application résiduelle de cette strate contient tous les s -uplets dont les éléments n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine, à l'exception de ceux donnés dans le lemme 4.22.*

Démonstration. Nous commençons par traiter le cas où il y a deux zéros $a_i = kl_i - 1$ et on suppose que $l_1 \leq l_2$. Nous allons partitionner les pôles en deux sous-ensembles de cardinal l_1 et $l_2 + 1$ respectivement. Les différentielles quadratiques avec les invariants souhaités seront données par la construction (C1) de la section 4.4.1.

On commence par le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2s' - 1, 2s' + 1)$ si $s = 2s'$ et des résidus quadratiques $(1, \dots, 1, R, R)$ où $R \notin \mathbf{R}_+$. Soit r une racine carrée de R , on note $v = 2r + s - 2$. On construit un polygone en concaténant les deux segments r puis $l_2 - 1$ segments 1 puis le vecteur $-v/2$ puis l_1 segments -1 en enfin le segment $-v/2$. Ce polygone est représenté à gauche de la figure 25 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 7; (-2^6))$. La construction (C1) à partir de ce polygone donne la différentielle quadratique avec les invariants souhaités.

Prenons un s -uplet de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$ avec $R \notin \mathbf{R}_+$, tel que soit $s_2 = 1$, soit $s_i \geq 3$ pour $i = 1, 2$. On construit une 2-différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ ayant ces 2-résidus. Dans le cas où $s_1 = 1$, il suffit de faire la construction du paragraphe précédent avec un unique r . Notons que si $a_1 = a_2 = (s - 1)/2$, alors le polygone est dégénéré, mais la construction (C1) s'étend à ce cas pour donner une différentielle quadratique avec les invariants locaux souhaités. Dans le cas où $s_1, s_2 \geq 3$, on a deux cas à traiter selon que l'un des s_i est impair ou les deux sont pairs. Si l'un des s_i est impair, on utilise la construction (C1) avec une uplet E formé de $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ vecteurs 1, de $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ vecteurs r , de $\lceil \frac{s_1}{2} \rceil$ vecteurs -1 , de $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$ vecteurs $-r$ et enfin avec deux vecteurs v_1, v_2 égaux à l'opposé de la demi-somme de ces vecteurs. L'ensemble E_1 de la construction (C1) est constitué des l_1 premiers éléments de E . Ce polygone est représenté au milieu de la figure 25 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ et les 2-résidus $((1^3), (R^3))$. Dans le cas où les s_i sont tous les deux d'ordres paires, on utilise la construction (C1) avec E constitué de $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor - 1$ fois -1 , de $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor - 2$ fois r , de $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois 1, de $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor + 2$ fois $-r$ et enfin une fois -1 et enfin avec deux vecteurs v_1, v_2 égaux à l'opposé de la demi-somme de ces vecteurs. L'ensemble E_1 de la construction (C1) est constitué des l_1 premiers éléments de E . Cette construction est présentée à droite de la figure 25 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 9; (-2^{10}))$ et les 2-résidus $((1^6), (R^4))$.

On considère maintenant le cas où les 2-résidus sont sur deux rayons distincts non nécessairement égaux entre eux. Nous noterons ces 2-résidus $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}, \beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ avec $\alpha_i \in \mathbf{R}_+^*$ et $\beta_j \in \mathbf{R}_+^*$. Si $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, alors on peut faire la construction (C1) comme au paragraphe précédent. On supposera donc que $s_1, s_2 \geq 2$.

On commence par le cas général où il existe deux résidus quadratiques non égaux le long de chaque rayon, i.e. il existe $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$ et $\beta_{j_1} \neq \beta_{j_2}$. On partitionne les résidus quadratiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1})$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ satisfaisant les conditions suivantes. Le cardinal

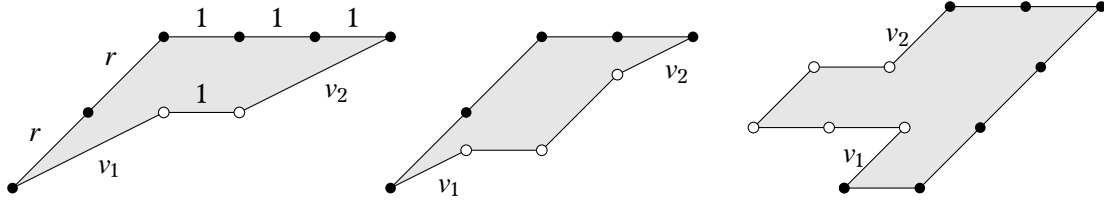


FIGURE 25. Les polygones utilisés pour obtenir des 2-différentielles dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec des 2-résidus de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$ avec $R \notin \mathbf{R}_+$.

de $\mathcal{R}_{1,1}$ est supérieur ou égal à $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ et la somme des racines des ces éléments est strictement inférieure à celles de $\mathcal{R}_{2,1}$. On partitionne les éléments $(\beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ en deux sous ensembles $\mathcal{R}_{i,2}$ avec les mêmes propriétés. On construit un polygone de type (C1) avec $v_1 = v_2$ définis comme l'opposé de la demi-somme des éléments définis dans la phrase suivante, E_1 , resp. E_2 , constitué des l_1 premiers, resp. $l_2 + 1$ derniers, éléments suivants. On prend les racines avec parties réelles positives des éléments de $\mathcal{R}_{1,1}$ et de ceux de $\mathcal{R}_{1,2}$ (si la partie réelle de ces éléments est nulle, la partie imaginaire est positive), puis les racines de parties réelles négatives de ceux de $\mathcal{R}_{2,1}$ et $\mathcal{R}_{2,2}$. Le polygone ainsi obtenu est clairement non dégénéré et la construction (C1) donne la différentielle quadratique désirée.

Considérons le cas où tous les résidus quadratiques sont égaux entre eux sur un rayon. La construction est similaire à celle que nous venons de faire avec les $\mathcal{R}_{i,2}$ constitués des résidus du rayon où ils sont égaux. Le seul cas qui pose problème est lorsque le nombre de résidus sur ce rayon est pair. Dans ce cas la construction précédente fonctionne dans le cas $l_1 = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ si et seulement si le cardinal de $\mathcal{R}_{1,1}$ est $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ et la longueur de v_i (défini comme précédemment) est inférieure ou égale à la longueur du premier résidu de $\mathcal{R}_{2,1}$. Si ce n'est pas le cas, on peut échanger le plus grand résidu de l'ensemble $\mathcal{R}_{1,1}$ avec le plus petit de $\mathcal{R}_{2,1}$ et la construction précédente donnera la différentielle quadratique désirée.

Considérons maintenant le cas où les R_i sont sur trois rayons différents. Dans un premier temps nous supposons que les $s = s_1 + s_2 + s_3$ 2-résidus sont de la forme $((R_1^{s_1}), (R_2^{s_2}), (R_3^{s_3}))$ avec les R_i triangulaires. Si $s_1 = s_2 = s_3$, on définit $v_1 = v_2 = \frac{s_1-2}{2} r_1$ et on construit le polygone de type (C1) suivant. Soit E le s -uplet dont les éléments sont $s_1 - 1$ fois r_1 , puis s_2 fois r_2 , puis une fois $-r_1$ et enfin s_3 fois r_3 . On concatène v_1 puis les l_1 premiers éléments l'ensemble E puis v_2 et enfin les $l_2 + 1$ derniers éléments de E . Le polygone obtenu pour $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ est représenté à gauche de la figure 26. On vérifiera facilement que le polygone ainsi obtenu est non dégénéré sauf dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$. La construction (C1) donne donc les différentielles quadratiques souhaitées.

Si $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ avec au moins une inégalité stricte on fait la construction (C1). Nous donnons tout d'abord une construction qui fonctionne sauf dans le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s_1 > s_2 = s_3$.

Le uplet E_1 est constitué des l_1 premiers éléments suivants : $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois r_1 , puis s_3 fois r_3 , puis $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois r_1 et enfin s_2 fois r_2 . On définit $v_1 = v_2$ égale à la moitié de l'opposé de la somme des éléments précédents. On construit alors le polygone de type (C1) avec ces vecteurs, le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 7; (-2^8))$ est représenté au centre de la figure 26 avec $s_1 = 5$, $s_2 = 2$ et $s_3 = 1$. Il reste à justifier que le polygone ainsi construit est non dégénéré sauf si $s_2 = s_3 = 1$ et $a_1 = a_2 = 2s' - 1$ avec $s = 2s' + 1$. Supposons que $s_2 = s_3 = 1$ et s est pair. On a alors $a_1 \leq s - 3$ et donc $l_1 \leq \lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$. Comme $v_1 = v_2 = r_1/2$, on en déduit immédiatement que le polygone est non dégénéré. Le cas s impaire se traite de la même façon dès que $a_1 \neq a_2$. Les cas avec $s_2 = s_3 \geq 2$ et soit s pair, soit s impair et $a_1 \neq a_2$ se traitent comme précédemment.

Il reste à traiter le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s_1 > s_2 = s_3$. Dans ce cas, on définit E_1 par une fois r_2 , puis $(s_1 - 1)/2$ fois r_1 , et $s_3 - 1$ fois r_3 . Le uplet E_2 est

définie par r_3 , puis $(s_1 + 1)/2$ fois $-r_1$ et enfin $s_2 - 1$ fois r_2 . Il suit facilement du fait que $v_1 = v_2 = r_1$ que le polygone de type (C1) ainsi obtenu est non dégénéré.

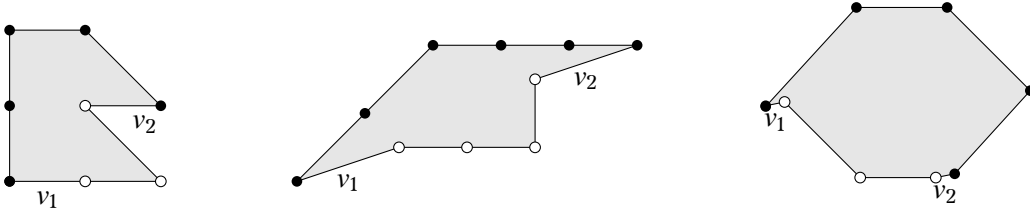


FIGURE 26. Les polygones utilisés pour construire les 2-différentielles dont les 2-résidus sont sur trois rayons distincts.

Supposons maintenant que les 2-résidus sont sur trois rayons distincts, mais pas tous égaux sur au moins un rayon. On les notera $(R_{1,1}, \dots, R_{1,s_1}, R_{2,1}, \dots, R_{2,s_2}, R_{3,1}, \dots, R_{3,s_3})$, où les $R_{i,j}$ sont sur un même rayon à i fixé. Pour chaque i , on partitionne $\{R_{i,1}, \dots, R_{i,s_i}\}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ et $\mathcal{R}_{i,2}$ vérifiant les propriétés suivantes. La norme de la somme des éléments de $\mathcal{R}_{i,1}$ est strictement inférieure à celle des éléments de $\mathcal{R}_{i,2}$. De plus la cardinalité de $\mathcal{R}_{i,1}$ est supérieure ou égale à $\frac{s_i}{2} - 1$. Il est clair que l'on peut toujours trouver de telles partitions. Le uplet E est constitué des racines carrées des éléments des $\mathcal{R}_{i,1}$ qui ont une partie réelle positive (ou une partie imaginaire si la partie réelle est nulle) dans l'ordre des arguments croissant puis des racines de partie réelle négative des $\mathcal{R}_{i,2}$. Les vecteurs v_i sont définis comme précédemment et le uplet E_1 est constitué des l_1 premiers éléments de E . Cette construction est représentée à droite de la figure 26 dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$. Les hypothèses sur les partitions impliquent de manière analogue à précédemment que la construction donne un polygone convexe dès que $s_i \geq 2$ pour $i = 2, 3$ ou que $a_1 \neq a_2$. Nous traitons le cas où $s_i = 1$ pour $i = 1, 2$ et $a_1 = a_2 = s_3 - 1$. On a alors $l_3 = \frac{s_3 + 1}{2}$. Dans ce cas la construction est similaire à la différence que E_1 contient la racine de partie réelle négative d'un élément de $\mathcal{R}_{3,2}$ puis les racines de partie réelle positive des éléments de $\mathcal{R}_{3,1}$. On suppose de plus que l'élément de $\mathcal{R}_{3,2}$ est de norme strictement inférieure au premier élément de $\mathcal{R}_{3,1}$ (ce qui est possible par hypothèse). Le polygone de type (C1) ainsi formé est dégénéré. Toutefois, grâce à l'inégalité précédente, la construction de type (C1) qui lui est associée donne une différentielle quadratique avec les invariants souhaités.

Considérons enfin les cas où les R_i appartiennent à au moins quatre rayons différents. Considérons le cas où les s résidus quadratiques R_i sont sur s rayons distincts et vérifient $\sum r_i = 0$ pour un choix de racines r_i de R_i . Nous supposons de plus que la concaténation des r_i pour i croissant est un polygone convexe. Un exercice élémentaire permet de vérifier qu'il existe au moins $s_1 := \lceil \frac{s}{2} \rceil$ racines r_i dont les arguments sont contenus dans un segment de longueur π . Nous supposons qu'il s'agit des résidus r_1, \dots, r_{s_1} . Nous considérons le uplet E constitué de r_2, \dots, r_{s_1-1} , puis $-r_1$, puis r_{s_1+1}, \dots, r_s et enfin $-r_{s_1}$. Les vecteurs v_i et les uplets E_i sont définis comme précédemment. Cette construction est représentée dans la figure 27. La condition sur les angles assure que le polygone de type (C1) ainsi obtenu est non dégénéré pour toutes les strates. Les différentielles quadratiques s'obtiennent avec la construction (C1).

Les cas où il existe une somme de racines des résidus quadratiques nulle et où il y a plusieurs résidus quadratiques sur le même rayon se traite de manière analogue au cas précédent.

Nous considérons le cas où les résidus quadratiques sont sur au moins 4 rayons et il n'existe pas de somme des racines r_i qui soit nulle. Dans ce cas, nous choisissons les racines de telle sorte que leur somme r est minimale. Quitte à multiplier tous les 2-résidus par une constante on supposera que r est réel positif. L'un des intervalles $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ contient au moins la moitié des directions des r_i (nous supposons que c'est I_1). Le uplet E



FIGURE 27. Les polygones utilisés pour construire un élément de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^5))$ dont les 2-résidus sont sur 5 rayons distincts et il existe des racines de somme nulle.

est constitué des r_i par argument croissant commençant par le premier dans I_1 . Si la partie réelle de la somme des racines d'argument dans I_1 est strictement inférieure à la somme pour les racines de I_2 , on construit le polygone de type (C1) avec les l_1 premières racines de E . Dans l'autre cas on construit le polygone de type (C2) avec les $l_1 + 1$ premières racines de E . Ces polygones sont non dégénérés dès que $l_1 \neq 0, 1$. Dans ces cas on vérifie facilement que les polygones sont dégénérés mais que les constructions (Ci) donnent une différentielle quadratique avec les invariants souhaités. On obtient donc les différentielles quadratiques souhaitées.

Nous considérons maintenant le cas des strates avec $n \geq 3$ zéros. Le résultat peut se déduire des strates avec deux zéros par éclatement de zéros, à l'exception du cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; (-2^{2s'+2}))$ avec les résidus quadratiques de la forme $((1^{2s'}), R, R)$ avec $R \notin \mathbf{R}_+$. Dans ce cas la construction, représentée sur la figure 28, est la suivante. On construit un triangle en concaténant le vecteur r avec s' fois le vecteur 1 puis trois fois le vecteur $-\frac{r+s'}{3}$ dans le premier cas. On construit un second triangle on concaténant les mêmes vecteurs en commençant par les vecteurs 1 puis r . Les trois derniers vecteurs du premier triangle sont notés v_1, v_2, v_3 dans cet ordre et ceux du second par w_i . La différentielle quadratique est obtenue en collant des demi-cylindres infinis aux vecteurs 1 et r et en identifiant v_1 à v_3, w_1 à w_3 et v_2 à w_2 . C.Q.F.D.

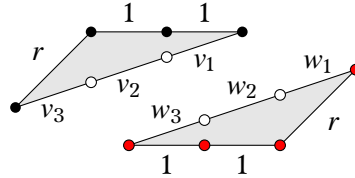


FIGURE 28. Les polygones utilisés pour construire un élément de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; (-2^{2s'+2}))$ dont les 2-résidus sont de la forme $((1^{2s'}), R, R)$.

Nous nous intéressons maintenant au cas des résidus quadratiques qui appartiennent tous à un même rayon issu de l'origine. Nous énonçons tout d'abord le cas de deux zéros, dont l'un d'ordre -1 .

Proposition 4.24. Soient $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 2s - 3; (-2^s))$ et $R := (R_1, \dots, R_s) \in (\mathbf{R}_+^*)^s$. Le s -uplet R appartient à l'image de l'application résiduelle de cette strate si et seulement il existe un graphe associé aux $r := (r_1, \dots, r_s; -r_s, \dots, -r_1)$ qui est un graphe de connexion symétrique.

Démonstration. Sil existe un graphe associé aux résidus r qui soit un graphe de connexion symétrique, alors il existe une différentielle symétrique d'ordre 2 dans la strate $\Omega \mathcal{M}_0(2s - 2; (-1^{2s}))$ dont les résidus sont r (voir proposition 1.6). Il est clair que la symétrie à comme point fixe le zéro d'ordre $2s - 2$ et un point non polaire de \mathbb{P}^1 . Le quotient de cette différentielle par la symétrie donne donc la différentielle quadratique souhaitée.

Réciproquement, supposons que (r_1^2, \dots, r_s^2) est dans l'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 2s-3; (-2^s))$. Alors le revêtement canonique de la différentielle quadratique correspondante est une différentielle abélienne de $\Omega \mathcal{M}_0(2s-2; (-1^{2s}))$ dont les résidus sont r . Le graphe de connexion associé est clairement symétrique. C.Q.F.D.

Le cas des strates où les deux zéros sont positifs et les résidus sont sur le même rayon est très technique. On peut l'attaquer en généralisant les graphes de connexions. Toutefois la combinatoire devient extrêmement complexe et une désinscription de ces cas nécessiterait un autre article. Nous nous contenterons dans la suite de résultats partiels pour $n \geq 3$ zéros. Nous pouvons montrer la surjectivité de l'application résiduelle dans quelques strates, laissant le cas général ouvert.

Nous prouvons la proposition 1.11 qui donne la surjectivité de l'application résiduelle de certaines strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$. Rappelons la notation $a_i = 2l_i + \bar{a}_i$ avec $\bar{a}_i \in \{0, -1\}$.

Preuve de la proposition 1.11. Nous commençons par montrer la surjectivité de l'application 2-résiduelle dans le cas où $n \geq 4$ et au moins quatre a_i sont impairs. On commence par supposer que $n = 4$ et les a_i sont impairs. Les cas avec $n > 4$ s'obtiennent alors par explosion de zéros. Le lemme 4.23 implique qu'il suffit de traiter le cas où les résidus quadratiques sont réels positifs. On partitionne ces résidus en quatre sous-ensembles \mathcal{R}_i de cardinaux respectifs l_i (on notera que $l_1 + \dots + l_4 = s$). On choisit un réel strictement positif s_1 tel que

$$S := 2s_1 + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i} > 0.$$

Enfin on choisit deux complexes s_2 et s_3 de partie réelle égale à $-\frac{S}{4}$ et de partie imaginaire respectivement strictement positive et strictement négative, tels que

$$2 \sum_{j=1,2,3} s_j + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i} = 0.$$

On forme alors le polygone schématisé à gauche de la figure 29. Les pointillés sont constitués de la concaténations des $\pm \sqrt{R_j}$ dans les \mathcal{R}_i . On obtient la différentielle quadratique souhaitée en collant les s_i deux à deux et des demis-cylindres infinis aux segments r_i .

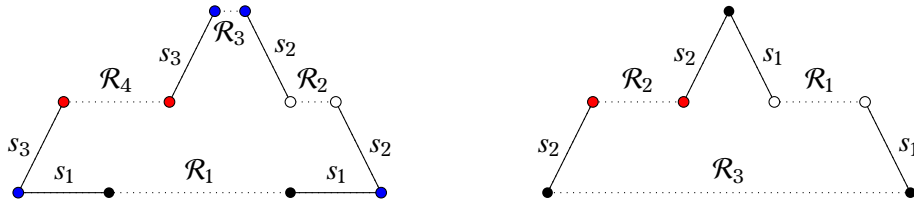


FIGURE 29. Le polygone pour obtenir une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_4; (-2^s))$ à gauche et de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_3; (-2^s))$ avec a_3 pair à droite.

Nous prouvons maintenant la surjectivité de l'application 2-résiduelle dans le cas où $n = 3$ et $a_1 + a_2 < a_3$ avec a_3 pair. Il suffit de considérer les résidus quadratiques réels positifs. On forme trois sous-ensembles \mathcal{R}_i des résidus de cardinaux respectifs l_1 , l_2 et $l_3 + 1$. Ces ensembles sont choisis de telle sorte que

$$\sum_{R_i \in \mathcal{R}_3} \sqrt{R_i} > \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \sqrt{R_i}.$$

Une telle partition est possible car $a_1 + a_2 < a_3$ implique $l_3 + 1 > l_1 + l_2$. Puis on forme le polygone schématisé à droite de la figure 29. Les pointillés sont constitués de la concaténations des $\pm \sqrt{R_j}$ dans les \mathcal{R}_i . On obtient la différentielle quadratique souhaitée en collant les s_i deux à deux et des demis-cylindres infinis aux segments r_i . C.Q.F.D.

4.4.3. Les strates de k -différentielles avec $k \geq 3$. Dans ce paragraphe, nous traitons le cas des k -différentielles avec $k \geq 3$. Nous montrons que l'application k -résiduelle est surjective sauf dans quelques cas sporadiques liés à la structure de réseau des racines k ième de l'unité pour $k = 3, 4, 6$. Nous traitons d'abord les cas avec deux zéros dont un d'ordre négatif, puis avec deux zéros positifs et enfin le cas des strates avec plus de trois zéros.

Nous prouvons le théorème 1.14 dans le cas des strates où un zéro est d'ordre négatif. Rappelons que ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans les cas exceptionnels. La preuve, une récurrence sur le nombre de pôles de la strate, repose sur le lemme 4.20 donnant une condition suffisante pour construire de telles k -différentielles.

Preuve du théorème 1.14, un zéro est d'ordre négatif. Nous traitons tout d'abord le cas simple où $-k < a_1 < -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Prenons des racines k ième r_i de R_i satisfaisant aux conditions suivantes. La somme des r_i est non nulle et le \mathbf{R} -espace vectoriel engendré par les r_i est \mathbf{C} . Pour $k \geq 3$ ces deux conditions peuvent être facilement satisfaites simultanément. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument décroissant. Nous formons un polygone en concaténant les résidus par argument croissant, puis en reliant le sommet final au sommet initial par deux segments satisfaisant les deux propriétés suivantes. Ils sont de même longueur et l'angle à leur intersection est égal à $(a_1 + k)\frac{2\pi}{k}$. Remarquons que ce polygone est sans point d'auto-intersection. La différentielle est obtenue en collant des demi-cylindres aux arêtes r_i et les deux arêtes spéciales entre elles par rotation.

Nous traitons maintenant le cas plus subtil où $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. L'application k -résiduelle des strates avec un unique pôle d'ordre $-k$ est trivialement surjective.

Dans le cas de deux pôles d'ordre $-k$, le lemme 4.20 implique sans difficultés que tous les k -résidus qui ne sont pas proportionnels à $(1, (-1)^k)$ sont dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k, -k)$. Supposons maintenant que les résidus soient $(1, (-1)^k)$ et que $(a_1, a_2) \neq (1, -1)$. Nous concaténons le segment $r_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right)$ avec le segment $r_2 = -1$ et relient le point de départ au point d'arrivée par deux segments v_1, v_2 de même longueur qui forment un angle $\frac{2(a_2+k)\pi}{k}$ à leur intersection. Le polygone ainsi formé est non dégénéré (car l'angle au point d'intersection entre r_1 et r_2 est $\frac{2\pi}{k}$). En identifiant v_1 avec v_2 et en collant deux demi-cylindres infinis à r_1 et r_2 on obtient la k -différentielle souhaitée. Enfin, les k -résidus $(1, (-1)^k)$ n'appartiennent pas à l'image de l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(-1, 1; -k, -k)$. Sinon la k -différentielle entrelacée obtenue en collant les deux pôles d'ordre $-k$ serait lissable (voir lemme 2.3). La k -différentielle obtenue par lissage serait dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$, qui est vide. Cela montre l'exception (1) du théorème 1.14.

Nous considérons maintenant les cas avec $s \geq 3$ pôles d'ordre $-k$. Nous montrons par récurrence sur s que les hypothèses du lemme 4.20 sont presque toujours vérifiées. Les quelques cas restant seront traités à la main.

Considérons tout d'abord le cas où tous les k -résidus R_i sont de norme 1. Afin d'utiliser le lemme 4.20 il suffit de montrer qu'il existe $s-1$ racines r_i des R_i telles que la somme appartienne au disque ouvert épointé Δ^* . Nous supposons dans un premier temps que si $k = 4, 6$, alors les R_i ne sont pas tous égaux entre eux et que si $k = 3$, alors ils ne sont pas proportionnels à $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. S'il y a $s = 3$ pôles, il suffit de prendre deux racines dont les arguments sont distincts mais de différence inférieure à $\frac{2\pi}{k}$. Cela est clairement toujours possible sous nos hypothèses. De plus, notons que ces deux racines ne sont pas proportionnelles. Par récurrence on suppose que la somme de $s-1$ racines est $t_{s-1} \in \Delta_*$ et qu'au moins deux racines ne sont pas proportionnelles. Pour r_s tel que $\langle t_{s-1}, r_s \rangle = \min_{r|_k=R_s} \{\langle t_{s-1}, r \rangle\}$ il est aisé de vérifier que $t_{s-1} + r_s \in \Delta^*$. On peut donc conclure par le lemme 4.20 à l'existence de k -différentielles avec les invariants souhaités.

Considérons les cas des k -résidus de la forme (1^s) pour $k = 4, 6$ et $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ pour $k = 3$. Nous construisons une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0((s-2)k+1, -1; (-k^s))$ avec ces k -résidus

sauf dans les cas sporadiques (2) à (6) du théorème 1.14. Notons que ces strates sont les seules qui ne soient pas vides lorsque $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et $k \in \{3, 4, 6\}$ (voir lemme 4.1).

Si $k = 3$ et les 3-résidus sont (1^s) , nous construisons le polygone de type (C1) en concaténant $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ segments $e^{i\pi/3}$ puis $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ fois -1 et en joignant le point initial avec le point final par deux segments d'égale longueur faisant un angle de $\frac{2\pi}{3}$ à leur intersection. Pour $s > 3$, cela nous donne un polygone non dégénéré et on conclut par la construction (C1).

Si les 3-résidus sont $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ on procède de la façon suivante. On part du polygone de type (C1) du paragraphe précédent construit avec $s_1 + \lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ segments. Remarquons qu'un triangle équilatéral permet de remplacer un 3-résidu égal à 1 par deux 3-résidus égaux à -1 , voir la figure 30. Cela implique le résultat pour s_2 pair. Si s_2 est impair, on construit le polygone de type (C1) en ajoutant un segment $\exp(-2i\pi/3)$ après les $s_1 + \lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ segments de la construction précédente.



FIGURE 30. Transformation d'un polygone de type (C1) pour obtenir un élément de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, -1; (-3^4))$ dont les 3-résidus sont (1^4) en un élément de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(10, -1; (-3^5))$ dont les 3-résidus sont $((1^3), (-1^2))$.

Dans le cas $k = 4$ nous construisons un polygone de type (C1) comme suit. Si le nombre de pôles s est impaire, le uplet E est constitué de $\lfloor s/2 \rfloor$ fois $-i$, du segment 1 et de $\lfloor s/2 \rfloor$ fois i . Comme la différence entre le point initial et final de la concaténation des éléments de E est 1, nous pouvons joindre ces deux points par deux segments de même longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{4}$. Si s est paire, E est constitué de $\frac{s}{2} - 1$ fois $-i$, puis deux fois 1 et enfin $\frac{k}{2} - 1$ fois i . La différence entre le point initial et final est donc le segment 2 et nous joignons ces deux points par deux segments de même longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{4}$. Ce polygone ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 5$ et $s = 3$. Ainsi la construction (C1) donne la 4-différentielle désirée.

Enfin il reste à traiter le cas $k = 6$. Si s est pair, E est formé de $\frac{s}{2} - 1$ fois -1 , puis $e^{2i\pi/3}$, puis $e^{i\pi/6}$ et finalement $\frac{s}{2} - 1$ fois 1. Si s est impaire, E est formé des vecteurs précédents et de $e^{-i\pi/6}$ à la fin. Nous joignons le point initial au point final de la concaténation des éléments de E par deux segments de même longueur et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Ce polygone ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 5$ et on conclut par la construction (C1).

Nous considérons maintenant les cas où les k -résidus n'ont pas tous la même norme. Commençons par le cas $s = 3$. Soit R_1 un k -résidu de plus grande norme. Si $k \neq 3, 4$, alors comme précédemment il existe des racines de R_2 et R_3 dont la somme est de norme strictement inférieure à $|R_1|$. Le lemme 4.20 permet alors de conclure.

Dans le cas où $k = 4$, si $R_2 \neq R_3$, alors la construction du paragraphe précédent fonctionne. Si $R_2 = R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$ il y a deux cas à considérer. Si $|R_1| > 4$, alors il existe deux racines quatrièmes de R_2 et R_3 non proportionnelles telles que la somme est inférieure ou égale à $\sqrt{2}$ et on peut utiliser le lemme 4.20. Supposons maintenant que $|R_1| \leq 4$. Si les 4-résidus sont distincts de $(1, 1, -4)$ alors nous permutons ces 4-résidus de telle sorte que $R'_1 = R_1$, $R'_2 = R_3$ et $R'_3 = R_2$ avec $(R_2, R_3) \neq (1, -4)$. Dans ce cas, la somme de racine quatrième de R'_3 et R'_2 se trouve dans Δ^* et le lemme 4.20 permet de conclure. Notons que cette construction ne fonctionne pas dans le cas $(-4, 1, 1)$ car les racines quatrièmes de -4 sont $\pm 1 \pm i$ et celles de 1 sont ± 1 et $\pm i$.

Dans le cas $k = 3$, une analyse similaire fonctionne. Si $R_2 \neq -R_3$, la construction du polygone de type (C1) ne pose aucun problème. Si $R_2 = -R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$, alors nous

considérons deux cas. Si $|R_1| > 3\sqrt{3}$, alors il existe deux racines troisièmes des 3-résidus R_2 et R_3 telles que la somme est inférieure ou égale à la racine cubique de $|R_1|$ et on peut utiliser le lemme 4.20. Supposons maintenant que $|R_1| \leq 3\sqrt{3}$. Si les 3-résidus sont distincts $(1, -1, 3i\sqrt{3})$, alors nous permutons les résidus de telle sorte que $R'_1 = R_3$, $R'_2 = R_2$ et $R'_3 = R_1$ avec $(R'_2, R'_3) \neq (\pm 1, 3i\sqrt{3})$. Dans ce cas, il existe des racines troisième de R'_3 et de R'_2 dont la somme est dans Δ^* . Et on utilise le lemme 4.20 pour faire la construction de type (C1).

Considérons maintenant par récurrence le cas où $s \geq 4$. Comme précédemment nous considérerons tout d'abord les cas $k \neq 3, 4$. Soient (R_1, \dots, R_{s+1}) des résidus où l'on suppose que la norme de R_1 est maximale et celle de R_{s+1} minimale. Par récurrence, il existe des racines k ème (non toutes proportionnelles) aux (R_2, \dots, R_s) telles que leur somme t_s est non nulle et de longueur strictement inférieure à $|R_1|^{\frac{1}{k}}$. Nous sommes maintenant ramenés au cas de trois k -résidus (R_1, t_s^k, R_{s+1}) . Ainsi la construction précédente nous donne des racines qui satisfont aux hypothèses du lemme 4.20. Cela implique la surjectivité de l'application k -résiduelle de ces strates.

Les cas $k = 3$ et $k = 4$ sont similaires entre eux et nous donnerons les détails uniquement dans le cas $k = 4$. Pour tous les 4-résidus qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -4)$ la construction du paragraphe précédent se généralise sans problèmes. Supposons maintenant que $R = (1, \dots, 1, -4)$. S'il y a un nombre impaire de 1, alors il existe une somme de racines (non toutes proportionnelles) de longueur 1 qui vérifient les hypothèses du lemme 4.20. Si le nombre $s - 1$ de 1 est pair, on considère le polygone de type (C1) associé à E donné par $\frac{s-3}{2}$ fois $-i$, puis fois 1, puis $\frac{s-3}{2}$ fois i et enfin $\sqrt{2} \exp(\frac{3i\pi}{4})$. Ce polygone est non dégénéré et la construction (C1) donne la 4-différentielle souhaitée.

Pour conclure, il reste à montrer que l'application k -résiduelle n'est pas surjective dans les cas sporadiques dont un des zéro est d'ordre négatif. Comme tous les cas sont similaires, nous ne prouverons que le cas du uplet $(1, 1, 1, 1)$ n'est pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une 4-différentielle ξ ayant ces invariants locaux. Elle aurait 4 demi-cylindres infinis dont les circonférences seraient dans l'ensemble $\{\pm 1, \pm i\}$. Il y a deux cas à considérer selon que le zéro d'ordre -1 borde un domaine polaire ou non.

Supposons que le zéro d'ordre -1 est au bord d'un domaine polaire. Nous pouvons couper la surface le long d'un lien selle entre les deux zéros afin d'obtenir deux segments v_1 et v_2 . Comme l'angle de la singularité est de $\frac{3\pi}{2}$ et que le domaine polaire contribue d'un angle π , on en déduit que la distance entre les deux points finaux des segments v_1 et v_2 est strictement inférieure à 1. Mais cette distance est la longueur de la somme des racines des 4-résidus. Comme ces racines appartiennent à $\{\pm 1, \pm i\}$ on en déduit que cette longueur est nulle. Et donc la surface est singulière.

Supposons maintenant que le zéro d'ordre -1 ne borde pas de domaine polaire. On peut alors couper la surface le long du lien selle de longueur minimale entre les deux zéros. La surface obtenue est une surface de translation à bord ayant un angle de $\frac{3\pi}{2}$. Le complément des domaines polaires est alors un hexagone. Toutefois il n'est pas possible de construire un hexagone dont quatre segments appartiennent à $\{\pm 1, \pm i\}$ et les deux derniers sont adjacents, de même longueur et forment un angle interne de $\frac{3\pi}{2}$. Cela montre que $\mathfrak{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$ ne contient pas $(1, 1, 1, 1)$. C.Q.F.D.

Nous prouvons maintenant le théorème 1.14 dans les cas où les deux zéros sont positifs. Ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans des cas sporadiques. La preuve repose sur le lemme 4.21. Dans cette preuve, nous utilisons les notations de ce lemme, en particulier $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1 < \bar{a}_2 < 0$.

Preuve du théorème 1.14, les deux zéros sont positifs. On considère une strate de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ et un s -uplet $R := (R_1, \dots, R_s)$ dans $(\mathbf{C}^*)^s$. Nous débutons par les cas où $k \geq 5$. Considérons les $l_2 + 1 \geq 2$ k -résidus de normes maximales, que l'on supposera être (R_{l_1+1}, \dots, R_s) . Nous normalisons les k -résidus de telle sorte que $\min_{i=l_1+1, \dots, s} \{|R_i|\} = 1$.

On peut choisir les racines r_i des R_i , telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières r_i soit de longueur supérieure à $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})|$ et celle des l_1 premières soit inférieure à 1. Cela se montre facilement par récurrence sur l_1 et l_2 . Comme $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})| > \sqrt{2}$, le lemme 4.21 implique l'existence d'une k -différentielle avec les invariants souhaités.

Nous considérons maintenant le cas $k = 4$. Nous traitons d'abord le cas des strates $\Omega^4 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-4^s))$ où $a_2 = kl_2 - 1$ avec $l_2 \geq 2$. Supposons que les $l_2 + 1$ derniers résidus sont de normes maximales. Nous normaliserons les k -résidus de telle sorte que le minimum de $\min_{i=l_1+1, \dots, l_s} \{|R_i|\} = 1$. On peut choisir des racines des k -résidus R_i telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières est strictement supérieure à 2 et celle des l_1 premières est inférieure à $\sqrt{2}$. Le lemme 4.21 permet alors de conclure.

On considère maintenant les strates de la forme $\Omega^4 \mathcal{M}_0(4(s-3) + 1, 3; (-4^s))$. Supposons tout d'abord que les 4-résidus ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1)$. On supposera que les deux derniers 4-résidus sont de normes maximales et que $|R_{s-1}| = 1 \leq |R_s|$. Si $|R_s|^{1/4} \geq \sqrt{2}$, alors il existe des racines r_{s-1} et r_s dont la somme est strictement supérieure à 2. On peut choisir les racines des autres 4-résidus non toutes proportionnelles entre elles telles que la norme de leur somme est inférieure à $\sqrt{2}$. On applique alors le lemme 4.21 afin d'obtenir une 4-différentielle avec les invariants souhaités. Si $|R_s|^{1/4} < \sqrt{2}$, il y a deux cas à traiter selon qu'il existe une somme des $s - 2$ premières racines des 4-résidus strictement inférieure à 1 ou non. Le premier cas ne pose pas de problème par le lemme 4.21. Si toutes les sommes sont supérieures ou égales à 1, alors on permute le rôle de R_s avec R_1 . On choisit alors des racines des 4-résidus telles que la somme des $s - 2$ premières est inférieure à 1 et celle des deux dernières est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$. La possibilité de ce choix se montre par récurrence sur s et le lemme 4.21 nous permet de conclure ce cas.

Dans le cas $k = 4$, il reste à considérer le cas des 4-résidus égaux à $(1, \dots, 1)$. Dans le cas des strates où l_1 est impaire ou $l_2 \geq 2$, on utilise la construction (C1) avec les éléments suivants. Le uplet E_1 constitué de $\lfloor \frac{l_1-1}{2} \rfloor$ racines égales à $-i$, puis une, resp. deux, égale à 1 si l_1 est impair, resp. pair, et $\lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor$ racines égales à i . Le uplet E_2 est constitué de $l_2 + 1$ racines égales à -1 . Nous traitons maintenant le cas où l_1 est pair et $l_2 = 1$. Si $l_1 \geq 6$ on peut faire la construction (C2) avec les éléments suivants. Le uplet E_1 est constitué de $\frac{s-4}{2}$ fois i , de 3 fois -1 et de $\frac{s-4}{2}$ fois $-i$. Le uplet E_2 est le uplet (1) . Enfin dans le cas des strates avec $l_1 = 2$ et $l_2 = 4$, on peut montrer de manière similaire aux cas où l'un des zéros est négatif que l'application résiduelle ne contient pas le uplet $(1, \dots, 1)$.

Enfin nous considérons le cas $k = 3$. Le cas des 3-résidus qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ se montre de manière similaire au cas $k = 4$. Nous ne donnerons pas les détails et considérerons le cas intéressant des s -uplets de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$.

Si $l_2 \geq 3$, alors on peut choisir des racines cubiques des 3-résidus satisfaisant les conditions suivantes. La somme des $l_2 + 1$ dernières racines est de longueur supérieure à $|3 + i\sqrt{3}| > \frac{7}{2}$. Les l_1 premières racines ne sont pas toutes proportionnelles et leur somme est de norme 1 ou $\sqrt{3}$. Le lemme 4.21 permet alors de conclure à la surjectivité de l'application 3-résiduelle dans ces cas.

Si $l_2 = 2$, i.e. $a_2 = 5$, alors on peut appliquer le lemme 4.21 s'il existe une somme de l_1 racines de norme 1. En particulier, il suffit de considérer le cas $l_1 \geq 2$. On sait que l'on peut toujours obtenir une somme de longueur 1 ou $\sqrt{3}$, donc on supposera que l'on a choisit des racines dont la somme est de norme $\sqrt{3}$. Si tous les 3-résidus ne sont pas égaux à 1, on peut échanger un 3-résidu de cette somme par son opposé. Avec ces nouveaux 3-résidus on peut clairement obtenir une somme des racines égale à 1.

Considérons maintenant le cas où tous les 3-résidus sont égaux à 1. Si l_1 n'est pas divisible par 3, notons $l_1 = 3l'_1 - t$ avec $t \in \{1, 2\}$. On fait la construction (C1) avec $E_2 = (-1, -1, -1)$ et E_1 constitué de l'_1 fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$, de l'_1 fois $\exp(\frac{i\pi}{3})$ et enfin de $l'_1 - t$ fois -1 . Soit la concaténation de E_1 est égale à 1, soit à 2. On peut vérifier que le polygone de type (C1)

ainsi obtenu est non dégénéré (voir la figure 31 à gauche). Dans le cas où l_1 est divisible par 3 on utilise la construction (C2). On traite tout d'abord le cas $l_1 > 6$. On considère le uplet $E_2 = (-1, -1)$ et le uplet E_1 constitué de $\lfloor \frac{l_1+1}{2} \rfloor$ fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$, puis $\lfloor \frac{l_1+1}{2} \rfloor$ fois $\exp(\frac{i\pi}{3})$ puis -1 si l_1 est pair. La construction (C2) est clairement réalisable. Finalement, si $l_1 = 3$ ou $l_1 = 6$, alors on peut montrer comme précédemment que l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, 5; (-3^6))$ ne contient pas (1^6) et celle de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(16, 5; (-3^9))$ ne contient pas (1^9) .

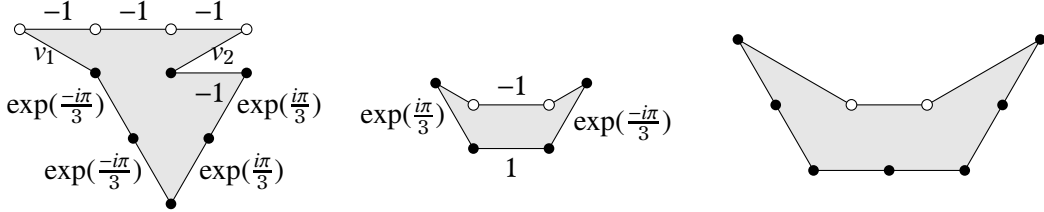


FIGURE 31. Les polygones dans le cas des strates cubiques avec $a_2 = 5$ et l_1 n'est pas divisible par 3 à gauche, avec $a_2 = 2$ et $a_1 = 4$ pour les 3-résidus $(1, 1, 1, -1)$ au centre et avec $a_2 = 2$ et $a_1 = 13$ pour les 3-résidus $((1^5), (-1^2))$ à droite.

Il reste maintenant à considérer le dernier cas où $l_2 = 1$, i.e. $a_2 = 2$. Nous allons montrer que si $l_1 = 5$, alors tous les 3-résidus de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$ avec $s = t_1 + t_2 = l_1 + l_2 + 1$ sont dans l'image de l'application résiduelle de ces strates. On peut remplacer un 3-résidu égal à 1 (resp. -1) par deux 3-résidus égaux à -1 (resp. 1) via la construction de la figure 30. On en déduit que tous les 3-résidus de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$ sont dans l'image de l'application résiduelle dès que $l_2 \geq 5$.

Nous considérons les cas $l_1 \leq 5$. Pour $l_1 = 1$, i.e. dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$, et les 3-résidus de la forme $(1, 1, -1)$, nous utilisons la construction (C1) avec $E_1 = (1)$ et $E_2 = (-1, -1)$. En revanche, on vérifie comme précédemment qu'il n'existe pas de 3-différentielle dans cette strate dont les 3-résidus sont égaux à 1.

Maintenant supposons que $l_1 = 2$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(4, 2; (-3^4))$. Si les 3-résidus sont (1^4) , alors on part de la 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$ dont les 3-résidus sont $(1, 1, -1)$. On remplace alors le résidu -1 par deux résidus 1 par la construction de la figure 30. Dans le cas où les 3-résidus sont $((1^3), -1)$, on utilise la construction (C2) avec $E_1 = (\exp(\frac{-i\pi}{3}), 1, \exp(\frac{i\pi}{3}))$ et $E_2 = (-1)$, voir la figure 31 centrale. En revanche, on montre de manière similaire à précédemment que $\mathfrak{R}_0^3(4, 2; (-3^4))$ ne contient pas $(1, 1, -1, -1)$.

Les cas avec $l_1 = 3$ et $l_1 = 4$, i.e. des strates $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, 2; (-3^5))$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(10, 2; (-3^6))$, se traitent en remplaçant un 3-résidu par deux 3-résidus opposés par la construction de la figure 30. On obtient donc que les 3-résidus de la forme $((1^{t_1}), (-1^{t_2}))$ qui ne sont pas de la forme $((1^4), -1)$, (1^6) et $((1^3), (-1^3))$ sont dans l'image de l'application 3-résiduelle de ces strates. Toutefois, on peut vérifier qu'il n'existe pas de 3-différentielles dont les 3-résidus sont des formes restantes.

Enfin considérons le cas $l_1 = 5$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(13, 2; (-3^7))$. On obtient les 3-résidus distincts de $((1^5), -1, -1)$ via la construction de la figure 30. Montrons qu'il existe une différentielle cubique dont les 3-résidus sont de la forme $((1^5), -1, -1)$. Cela peut se faire grâce à la construction (C2) avec $E_1 = (\exp(-i\pi/3), \exp(-i\pi/3), 1, 1, \exp(i\pi/3), \exp(i\pi/3))$ et $E_2 = (1)$, voir la figure 31 de droite. C.Q.F.D.

Pour terminer, nous montrons qu'il n'existe pas d'obstruction pour les strates de genre zéro, n'ayant que des pôles d'ordre $-k$ et au moins trois zéros.

Proposition 4.25. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur le nombre de zéros. On commence par vérifier que, partant d'une strate avec 3 zéros, on peut toujours additionner l'ordre de deux zéros et obtenir une strate dont l'application résiduelle est surjective. Remarquons que cette strate peut ne pas être primitive. Toutefois, cette dernière n'est pas constituée par des k -différentielles qui sont la puissance k ème de différentielles abélienne. L'équation (2.1) établit la surjectivité de l'application k -résiduelle pour un nombre supérieur ou égal à trois zéros par éclatement de zéros. C.Q.F.D.

5. PLURIDIFFÉRENTIELLES EN GENRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À UN.

Dans cette section nous montrons que, à l'exception de quatre familles exceptionnelles, pour chaque strate de genre $g \geq 1$, l'application k -résiduelle est surjective. Plus précisément, nous prouvons les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 pour les strates k -différentielles avec $k \geq 2$. Nous considérons dans la section 5.1 les strates ayant au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Dans la section 5.2 nous traitons les cas où tous les pôles sont d'ordre $-k$. Enfin, nous traitons le cas des strates sans pôles dans la section 5.3.

5.1. Pluridifférentielles avec un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Dans ce paragraphe, nous considérons les strates avec au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Nous montrons tout d'abord que l'application k -résiduelle est surjective pour les strates de genre 1 possédant un unique zéro distinctes de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4a; (-4^a))$. Dans ce cas, l'application 2-résiduelle contient $\mathbb{C}^a \setminus \{0\}$ (lemmes 5.1 et 5.2). Puis nous montrons la surjectivité des applications 2-résiduelles de certaines strates quadratiques (lemme 5.3). Nous en déduisons la surjectivité de l'application k -résiduelle dans le cas général par éclatement de zéro et couture d'anse. Enfin nous montrons que $0 \in \mathbb{C}^a$ n'appartient pas à l'image de l'application 2-résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4a; (-4^a))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$ pour tout $a \geq 1$ (lemmes 5.5 et 5.6).

Lemme 5.1. *L'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_1^k(m; -m)$ est surjective pour les couples (k, m) tels que $m > k \geq 2$ distincts de $(2, 4)$ et l'image de $\mathfrak{R}_1^2(4; -4)$ contient \mathbb{C}^* .*

Démonstration. Si $k \nmid m$, la surjectivité de $\mathfrak{R}_1^k(m; -m)$ est équivalent au fait que la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(m; -m)$ soit non vide. Ceci est une conséquence élémentaire du théorème d'Abel. À partir de maintenant, nous supposons que $k \mid m$.

Une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(\ell k, -\ell k)$ avec $\ell \geq 2$ dont un résidu non nul est donnée par le recollement de la k -partie polaire non triviale de type $k\ell$ associée aux vecteurs $(\emptyset; v_1, \dots, v_4)$ représentés sur la figure 32.

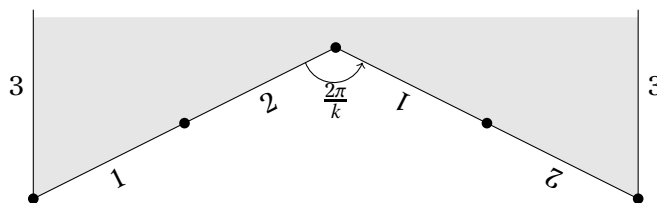


FIGURE 32. Une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ (en blanc) et $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; -k)$ (en gris).

Nous traitons maintenant le cas où le k -résidu au pôle est nul. Si $k \geq 3$, alors la k -différentielle à gauche de la figure 33 appartient à la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ et possède un k -résidu nul. Plus généralement, une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(\ell k, -\ell k)$ dont le k -résidu est nul est donnée par le recollement d'une k -partie polaire triviale de type $k\ell$ associée à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ où les v_i sont représentés à gauche de la figure 33.

Nous traitons maintenant le cas des strates quadratiques $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2\ell; -2\ell)$ avec $\ell \geq 3$. Une 2-différentielle avec ces invariants locaux est obtenue à partir de $\ell - 1$ domaines basiques

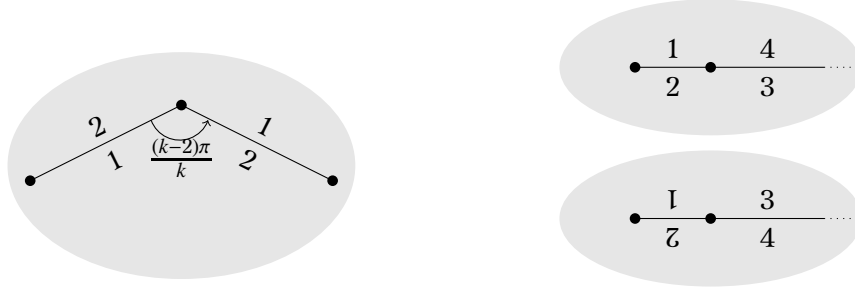


FIGURE 33. Une k -différentielle sans k -résidu dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ à gauche et dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(6; -6)$ à droite.

positifs D_i^+ et $\ell - 1$ négatifs D_j^- . Les domaines D_1^\pm et D_2^\pm sont donnés par les domaines basiques positifs (resp. négatifs) associés au vecteur $v = 1$. Les $2(\ell - 2)$ autres domaines D_i^\pm sont les domaines polaires associés à l'ensemble vide. Pour tout i , on colle la demi-droite \mathbf{R}^- du domaine D_i^+ à celle de D_i^- et la demi-droite \mathbf{R}_+ de D_i^+ à celle de D_{i+1}^- modulo $\ell - 1$. Les segments au bord des domaines positifs (resp. négatifs) D_1^+ et D_2^+ (resp. D_1^- et D_2^-) sont collés entre eux par une rotation d'angle π . Cette construction est illustrée à droite de la figure 33. On vérifiera facilement que la différentielle quadratique ainsi construite possède les invariants locaux souhaités. C.Q.F.D.

Lemme 5.2. Soient $k \geq 2$ et $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une partition de 0 telle que $(p, r) \neq (0, 0)$. Si $\mu \neq (4p; (-4^p))$ ou $k \neq 2$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^k(\mu)$ est surjective. De plus, l'image de $\mathfrak{R}_1^2(4p, (-4^p))$ contient $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$.

Démonstration. Nous commençons par le cas où $r \geq 2$. L'application résiduelle de la strate $\Omega \mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ est surjective (c.f. le lemme 4.2). On obtient donc la surjectivité de $\mathfrak{R}_1^k(\mu)$ par couture d'anse.

Supposons maintenant qu'il existe un unique pôle d'ordre non divisible par k . Le lemme 4.2 dans le cas des strates $\Omega \mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c; (-k^s))$ implique que $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$ est contenu dans l'image de $\mathfrak{R}_1^k(\mu)$ par couture d'anse. Il suffit donc de prouver que l'origine est dans l'image de l'application résiduelle. En particulier, ces strates ne possèdent pas de pôles d'ordre $-k$. Nous associons aux pôles d'ordre $-k\ell_i$ les k -parties polaires triviales d'ordres $k\ell_i$ associées à $(1; 1)$. Pour le pôle d'ordre $-c$, nous prenons une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(c; -c)$ avec un lien selle d'holonomie 1. Nous obtenons une surface plate à bord en la coupant le long de ce lien selle. La pluridifférentielle désirée est obtenue en collant les bords des fentes de manière cyclique.

Il nous reste à traiter le cas où tous les pôles sont d'ordres divisibles par k . Nous commençons par construire une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ dont tous les k -résidus sont nuls (sauf dans le cas où $k = 2$ et $\mu = (4p; (-4^p))$). Partons de la k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(k\ell_1; -k\ell_1)$ sans résidu donnée par le lemme 5.1 (on suppose que $\ell_1 \geq 3$ si $k = 2$). On peut alors couper cette surface le long d'un lien selle dont la période sera notée v . Par exemple, on coupe les k -différentielles de la figure 33 le long du lien selle dénoté par 1. Pour tous les autres pôles on prend une k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(v; v)$. La surface obtenue en recollant les segments de manière cyclique (voir la figure 34) a les propriétés désirées.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega^k \mathcal{M}_g(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$, telles que $s \neq 0$ ou $s = 0$ et il existe au moins un k -résidu non nul. Nous supposons que s'il existe un pôle avec un k -résidu nul, alors le k -résidu de P_1 est nul. Considérons les pôles P_i avec $2 \leq i \leq p'$ qui possèdent un k -résidu R_i non nul. Nous associons à P_i la k -partie polaire non triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(r_i; \emptyset)$ où r_i est une racine k ième de R_i de partie réelle positive (ou de partie imaginaire positive si la partie réelle est nulle). Considérons maintenant les pôles P_j

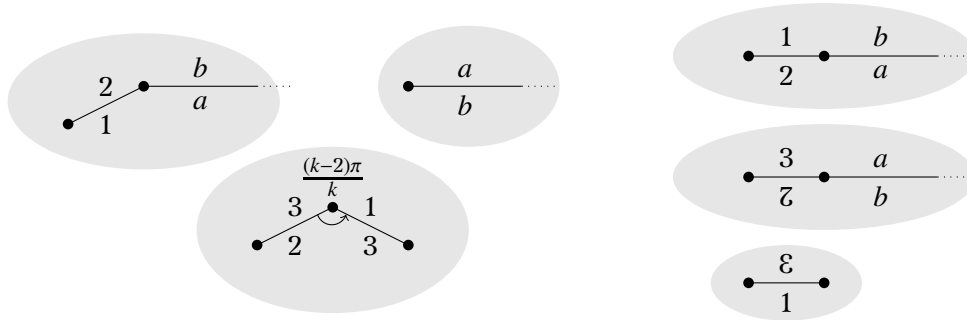


FIGURE 34. k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(5k; -2k, -3k)$ avec un résidu nul pour $k \geq 3$ à gauche et $k = 2$ à droite

avec $j > p'$ ayant un k -résidu nul. Nous associons la k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_j$ associée à $(r_{i_j}; r_{i_j})$ pour un k -résidu $R_{i_j} \neq 0$. Puis nous collons le segment r_i du domaine positif de P_i au segment r_i du domaine basique négatif de P_j .

Enfin, pour le pôle P_1 nous faisons la construction suivante. Notons que la somme des r_i est non nulle. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument croissant. Nous prenons pour P_1 la k -partie polaire de type $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_1, v_2, v_2; r_2, \dots, r_{p'})$ où les v_i sont donnés comme suit. Les v_i sont de même longueur, vérifient l'égalité $r_1 = 2v_1 + 2v_2 - \sum_{i \geq 2} r_i$ et l'angle (au dessus) du point d'incidence de v_1 et v_2 est $\frac{2(k-1)\pi}{k}$.

La k -différentielle est obtenue en identifiant par translation les bords r_i des domaines polaires positifs aux segments r_i de la k -partie polaire négative de P_1 . Enfin, nous identifions par rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et translation, le premier v_1 au premier v_2 et le second v_1 au second v_2 . Cela donne une pluridifférentielle primitive avec les invariants souhaités. Un exemple est donné dans la figure 35. C.Q.F.D.

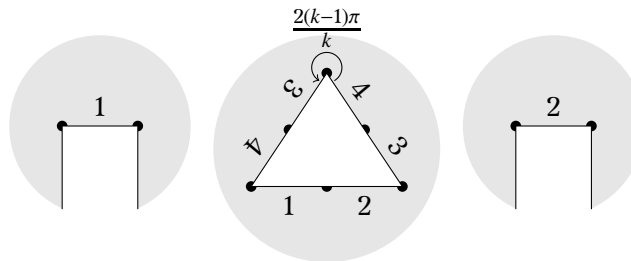


FIGURE 35. Une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(6k; (-2k^3))$ dont les k -résidus sont $(0, 1, 1)$.

Lemme 5.3. Pour tout $p \geq 1$, l'image de l'application 2-résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2p+1, 2p-1)$ et des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4(p+1); (-4^p))$ contient l'origine.

Démonstration. Pour commencer la figure 36 exhibe une différentielle quadratique primitive ayant un 2-résidu nul dans chacune des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ (en gris).

Nous prouvons maintenant le résultat pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2p+1, 2p-1)$ par récurrence sur le nombre p de pôles. L'hypothèse de récurrence est la suivante. Il existe une 2-différentielle primitive dont les 2-résidus sont nuls dans toutes les strates de cette forme avec $p-1$ pôles telles que si $a_2 = -1$, alors il existe un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre a_1 à lui-même et dans tous les cas il existe un lien selle entre les deux zéros. L'hypothèse de récurrence est satisfaite pour $p = 1$ par les 2-différentielles représentées dans la figure 36. Nous allons construire des 2-différentielles satisfaisant à l'hypothèse de récurrence avec p pôles.

Si $(a_1, a_2) = (4p+1, -1)$, coupons la différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4p-3, -1; (-4^{p-1}))$ donnée par l'hypothèse le long du lien selle entre le zéro d'ordre $4p-3$. Prenons une 2-partie

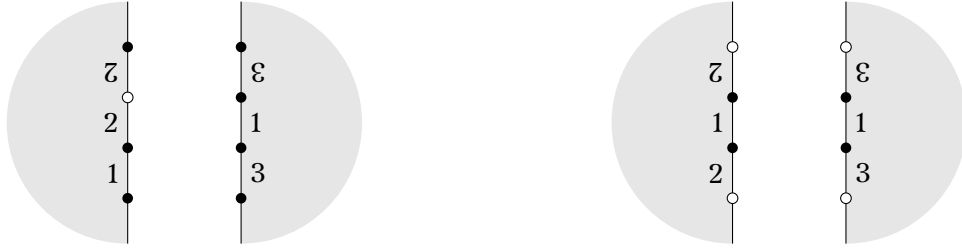


FIGURE 36. Différentielles quadratiques dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ avec 2-résidus nuls en gris. Différentielles quadratiques dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, -1; (-2^2))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(2, 2; (-2^2))$ avec 2-résidus (1, 1) en blanc.

polaire d'ordre 4 associée à $(v; v)$ où v est la période de ce lien selle. La surface formée en collant les bords de ces surfaces par translation est dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p+1, -1; (-4^p))$, ces 2-résidus sont nuls et possède un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre $4p+1$ à lui-même et entre les deux zéros.

Si $(a_1, a_2) \neq (4p+1, -1), (2p+1, 2p-1)$, la construction du paragraphe précédent en partant d'une 2-différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1-2, a_2-2; (-4^{p-1}))$ et du lien selle entre les deux zéros donne une différentielle quadratique ayant les propriétés souhaités.

Une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1); (-4^p))$ sans résidus aux pôles est donnée de la façon suivante. Le lemme 5.2 fournit une différentielle primitive de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4(p+1); (-4^p); -2, -2)$ telle que les résidus aux pôles d'ordre -4 sont nuls et les résidus quadratiques aux pôles doubles sont égaux entre eux. Nous formons une 2-différentielle entrelacée en collant les deux pôles d'ordre -2 ensemble. Cette 2-différentielle entrelacée peut être lissée sans changer les 2-résidus aux pôles d'ordre -4 (voir proposition 2.3) pour donner une 2-différentielle ayant les invariants souhaités. C.Q.F.D.

Lemme 5.4. *L'application k -résiduelle des strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(\mu)$ avec $g \geq 1$, $\mu \neq (4p; (-4^p))$ et $\mu \neq (2p-1, 2p+1; (-4^p))$ est surjective.*

Démonstration. Si μ possède un unique zéro on obtient les k -différentielles dans les strates souhaitées par couture d'anses à partir des k -différentielles de genre 1 ayant un unique zéro (voir la proposition 2.6). La surjectivité de l'application k -résiduelle est une conséquence de la surjectivité des applications k -résiduelles de ces strates (voir lemme 5.1 et 5.2), à l'exception des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_g(a; (-4^p))$. Dans ces cas le k -résidu $(0, \dots, 0)$ est obtenu en partant des strates $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1); (-4^p))$ et en utilisant le lemme 5.3.

Considérons les strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -c_i; -b_j; (-k^s))$ avec $n \geq 2$ zéros. La surjectivité de l'application k -résiduelle est obtenue en éclatant l'unique zéro des k -différentielles de la strate $\Omega^k\mathcal{M}_g(\sum a_i; -c_i; -b_j; (-k^s))$ (voir proposition 2.5), sauf pour $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; (-4^p))$ avec $n \geq 2$. Dans ces cas la surjectivité a été montrée dans le lemme 5.3 pour $n = 2$. Pour $n \geq 3$, il suffit d'éclater l'un des deux zéros de ces 2-différentielles pour obtenir la surjectivité. C.Q.F.D.

Lemme 5.5. *Il n'existe pas de différentielle quadratique primitive dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p; (-4^p))$ pour $p \geq 1$ dont tous les résidus quadratiques sont nuls.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -4)$. Si elle contenait une différentielle quadratique (primitive) dont le 2-résidu est nul, alors on pourrait former une 2-différentielle entrelacée lissable en collant au pôle le carré d'une différentielle abélienne de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(\emptyset)$. D'après le lemme 2.4, le lissage produirait une différentielle quadratique primitive dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(4)$, ce qui n'existe pas (voir [MS93]).

Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique (primitive) ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p; (-4^p))$ pour $p \geq 2$ dont tous les 2-résidus soient nuls. Dans la suite, nous faisons référence aux notions de la section 2.4. On peut supposer que le cœur de cette surface est

dégénéré et que toutes les connections de selle sont horizontales. Cette surface possède alors $p + 1$ liens selles et chaque domaine polaire est bordé par au moins deux liens de selles (sinon son résidu serait non nul). On en déduit que le graphe d'incidence associé peut être de l'une des deux formes suivantes.

- (1) Il y a un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- (2) Il y a deux sommets de valence 3, et les autres sont de valence 2.

Nous pouvons simplifier ξ de la manière suivante. Prenons un domaine polaire bordé par 2 liens selles. Coupons ξ le long de ces liens selles, enlevons ce pôle et recollons le deux segments au bord que nous venons de créer. La différentielle que nous venons de créer est encore primitive, sans résidus et dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4(p-1); (-4^{p-1}))$.

Considérons une différentielle ξ dont le graphe d'incidence possède un pôle de valence 4. En répétant l'opération du paragraphe précédent jusqu'à avoir éliminé tous les pôles de valence 2, on obtient une différentielle quadratique primitive sans résidu dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4; -4)$. Cela montre que ξ ne peut pas avoir de graphe d'incidence avec un sommet de valence 4.

Supposons que le graphe d'incidence de ξ possède deux pôles de valence 3. En répétant l'opération du paragraphe précédent nous pouvons obtenir deux graphes. Dans le premier cas deux sommets sont reliés entre eux par trois arêtes. Dans le second cas les deux sommets sont reliés entre eux par une unique arête et ont chacun une boucle. Remarquons que dans les deux cas, le fait que le résidu quadratique est nul et les connections de selles sont horizontales implique que l'une des connections de selle est strictement plus longue que les deux autres. Les deux connections les plus courtes se trouvent du même côté du segment formé par le bord d'un domaine polaire. Ces deux segments ne peuvent pas être identifiés ensemble car la surface obtenue aurait un zéro d'ordre -1 . Cela exclut le graphe avec des boucles. Dans l'autre cas, la surface est obtenue par des translations uniquement (pas de rotations) et n'est donc pas primitive. C.Q.F.D.

Lemme 5.6. *L'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(2p-1, 2p+1; (-4^p))$ ne contient pas l'origine.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(3, 1; -4)$. S'il y avait une différentielle quadratique dans cette strate dont le 2-résidu est nul, alors on pourrait former une 2-différentielle entrelacée lissable en collant au pôle le carré d'une différentielle abélienne de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. Par le lemme 2.4, le lissage donnerait une différentielle quadratique dans $\Omega^2 \mathcal{M}_2(3, 1)$, qui est vide (voir [MS93]).

Nous supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4^p))$ dont tous les résidus sont nuls. Nous supposons (voir section 2.4) que le cœur de ξ est dégénéré et que toutes les $p + 2$ connections de selle sont horizontales.

Rappelons que le graphe d'incidence et le graphe d'incidence simplifié de ξ ont été introduit dans la section 2.4. Les sommets du graphe d'incidence de valence supérieure ou égale à trois sont dits *spéciaux*. Remarquons qu'un domaine polaire ne peut pas être bordé par un unique lien selle, sinon le résidu de ce pôle serait non nul (ie, le graphe d'incidence n'a pas de sommet de valence 1). Les graphes d'incidence simplifiés peuvent être de l'une des formes suivantes. Soit le graphe possède un sommet de valence (6), soit deux sommets de valences respectives (5, 3) ou (4, 4), soit trois sommets de valences respectives (4, 3, 3), ou quatre sommets de valences (3, 3, 3, 3).

Le reste de la preuve se présente en deux étapes. Tout d'abord nous simplifions la surface ξ . Nous obtiendrons une *surface réduite*, c'est à dire une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4^p))$ dont tous les résidus sont nuls, le cœur est dégénéré et les deux extrémités du bord des domaines polaires de valence 2 et 3 correspondent au zéro d'ordre $2p-1$. Ensuite nous montrons que les surfaces réduites n'existent pas en considérant les graphes d'incidence possibles.

Nous décrivons maintenant la procédure qui associe à ξ une surface réduite. Prenons un domaine polaire de valence 2 bordé par deux connections de selle joignant le zéro d'ordre

maximal ou les deux zéros. Coupons ξ le long de ces deux liens selles, supprimons ce pôle et collons les deux segments que nous avons créés. Cette opération fait diminuer l'ordre du zéro d'ordre maximal par 4 ou ceux des deux zéros par 2 suivant le cas. Dans les deux cas nous obtenons un élément de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p-3; (-4^{p-1}))$. Remarquons que l'opération qui fait diminuer l'ordre du zéro maximal par 4 rend ce zéro d'ordre strictement inférieur à l'autre.

Prenons un sommet de valence 3 et qui ne possède pas de boucle. De plus, on suppose que les extrémités de la fente du domaine polaire correspondent aux deux zéros ou au zéro d'ordre maximal. Nous coupons ξ le long de ces trois liens selles et supprimons ce pôle. La surface que nous obtenons a un bord constitué de trois segments v_1, v_2 et v_3 avec $v_1 = v_2 + v_3$. Nous collons v_2 et v_3 sur v_1 en préservant les extrémités de la fente (cela créer une singularité sur v_1). Cette opération diminue l'ordre des deux zéros de 2 ou le zéro d'ordre maximal par 4 (et ce zéro devient le zéro d'ordre minimal).

Nous appliquons les opérations décrites dans les deux paragraphes précédent sur ξ jusqu'à ce que aucune ne soit possible. La surface que nous obtenons est soit réduite, soit possède un unique pôle. Dans ce second cas, on obtiendrait une différentielle quadratique sans résidu dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(3, 1; -4)$. Ceci étant absurde, on supposera que la surface est réduite avec un nombre de pôles supérieur ou égal à deux.

Nous aurons besoin du résultat suivant sur les liens selles contiguës dans les surfaces réduites. Deux connections de selle adjacentes ne peuvent pas être les extrémités d'une boucle formée de pôles de valence 2 du graphe d'incidence. En effet, supposons que les connections de selles adjacentes sont du même côté de la fente. Dans ce cas, le zéro correspondant à leur point d'intersection est différent du zéro correspondant aux autres extrémités de ces segments. Comme la surface est réduite, la boucle ne contient pas de sommets de valence deux. Ainsi le zéro au point d'intersection est d'ordre -1 . Mais aucune des strates que nous considérons n'a un zéro d'ordre -1 . Supposons maintenant que les deux connections de selle se rencontrent de part et d'autre de l'extrémité de la cicatrice. Le fait que la surface soit réduite implique que la boucle ne contient pas de sommets de valence 2. Cela implique que le bout de la cicatrice est un point régulier. Cela conclut la preuve de ce résultat élémentaire.

Nous traitons maintenant tous les cas possibles en fonction des valences des sommets spéciaux des graphes d'incidence des surfaces réduites. Remarquons que ceux-ci sont analogues aux graphes simplifiés avec la différence qu'il peut rester quelques sommets de valence deux qui ne contribuent qu'au zéro d'ordre minimal.

Nous commençons par le cas où tous les sommets spéciaux sont de valence 3. Comme la surface est réduite, le zéro correspondant au bout des fentes des domaines polaires est d'ordre minimal. Toutefois, ce zéro est clairement d'ordre supérieur ou égal à l'autre zéro, ce qui est absurde.

Dans le cas où un pôle est de valence 4 et deux autres sont de valence 3. Le zéro d'ordre minimal possède un angle minimal de 8π . En effet il doit correspondre aux bords des fentes des domaines de valence 3 et à au moins deux singularités du pôle de valence 4. D'un autre côté, l'angle du zéro maximal est d'angle au plus 7π . En effet, chaque pôle de valence trois contribue d'un angle π et celui de valence 4 au plus 4π . Cela donne une contradiction.

Nous traitons maintenant le cas des graphes d'incidence avec deux pôles spéciaux de valence 4. Le premier graphe possède une boucle à chaque pôle de valence 4 et deux arêtes les joignant. Le second graphe possède simplement quatre arêtes entre ces deux sommets. Remarquons qu'a priori, il peut y avoir des sommets de valence 2 sur ces arêtes.

Considérons le graphe avec deux boucles. Aux sommets spéciaux, soit il y a deux segments de part et d'autre de la fente, soit un côté contient 3 connections de selles et l'autre 1. De plus, le fait que les résidus quadratiques soient nuls impliquent que les deux sommets spéciaux sont simultanément de la même forme. S'il y a deux liens selles de part et d'autres

du segment, alors les connections de selle correspondant aux boucles ne peuvent pas être du même côté. On en déduit facilement que la seule identification possible donne une surface à holonomie triviale. Supposons maintenant qu'il y ait trois connections de selles d'un côté de chaque fente. Comme les liens selles des boucles ne peuvent pas être adjacents, les extrémités des fentes correspondent au même zéro. Ce pôle est donc d'ordre paire (quelque soit le nombre de pôles de valence deux sur les arêtes), ce qui est absurde.

Nous considérons enfin le graphe où les deux sommets spéciaux sont reliés par quatre arêtes contenant éventuellement des sommets de valence 2. Dans ce cas, le nombre de liens selles est identique de part et d'autre de la fente des sommets spéciaux. Si il y a 3 segments d'un côté et 1 de l'autre, alors la surface est non primitive. Ainsi nous considérons le cas avec deux liens selles de part et d'autre de la fente. Remarquons qu'il n'y a pas de sommets de valence 2 sur les arêtes. Sinon il existerait des connections de selle fermées entre le zéro d'ordre minimal. Cela implique que 6 des 12π des domaines spéciaux contribuent à ce zéro. Cela est clairement impossible. Donc on obtient une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, 3; (-4^2))$. Le zéro d'ordre maximal est d'angle 7π et le minimal de 5π . Ainsi il existe au moins une connexion de selle fermée reliant le zéro d'ordre minimal à lui même. Comme les segments correspondant ne peuvent pas être contiguës, cela implique que l'angle à ce zéro est au moins 6π . On a obtenu la contradiction souhaitée.

Nous regardons maintenant les graphes avec un sommet de valence 5 et un de valence 3. Remarquons qu'il n'y a pas de boucle au sommet de valence 3. Sinon les liens selles formant les extrémités de cette boucle seraient adjacents. Donc le graphe est formé de trois arêtes reliant les deux sommets spéciaux et d'une boucle au sommet de valence 5 (et éventuellement d'autres sommets de valence 2). Dans le domaine de valence 5, il n'est pas possible qu'un unique segment se trouve d'une part de la fente. Sinon cette connexion de selle ne pourrait border ni la boucle ni l'une des trois arêtes connectant au pôle de valence 3. En effet, ce lien selle ne peut être homologue à aucun autre segment et à aucune somme de deux des quatre autres segments.

Donc il y a trois liens selles d'un côté et deux de l'autre. De plus, les liens selles bordant la boucle se trouve du même côté de la fente (pour des raisons de primitivité). Elle est donc formée en identifiant les deux segments extérieurs du côté de la fente qui contient trois segments. Mais il est alors aisé de vérifier que toutes les différentielles quadratiques dont les 2-résidus sont nuls que nous pouvons obtenir possèdent un unique zéro.

Pour terminer, nous considérons le cas d'un graphe d'incidence avec un unique pôle de valence 6. Le bord de ce domaine polaire est composé de six segments rangés en trois paires de longueurs identiques. Comme deux segments de la même paire ne peuvent pas être adjacents, il y a trois segments de part et d'autre de la fente. Si il y avait un segment de chaque paire de part et d'autre de la fente, alors la surface serait non primitive. Donc les liens selles doivent être de la forme $A_1B_1A_2$ d'un côté et $C_1B_2C_2$ de l'autre. Dans ce cas, il est facile de constater que les zéros sont d'ordres pairs. Cette dernière contradiction conclut la preuve. C.Q.F.D.

5.2. Pluridifférentielles dont tous les pôles sont d'ordre $-k$. Dans ce paragraphe, nous considérons les strates de k -différentielles dans $\Omega^k\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$. Nous commençons par traiter le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro. Nous montrons dans le lemme 5.7 que l'application k -résiduelle contient tous les k -résidus sauf éventuellement dans le cas quadratique si tous les résidus sont colinéaires. Puis nous montrons dans le lemme 5.8 que la seule exception en genre 1 peut être les résidus quadratiques proportionnels à $(1, \dots, 1)$ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ avec s pair. Puis nous montrons dans le lemme 5.9 que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ et s pair. Les strates générales sont traitées dans le lemme 5.10. Enfin nous prouvons dans les lemmes 5.11 et 5.12 que les résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(s-1, s+1; (-2^s))$ avec s pair.

la surface souhaitée, nous collons des demi-cylindres infinis aux segments 1 et -1 . Enfin, le segment de gauche (resp. droite) reliant les deux points initiaux est collé par rotation au segment de gauche (resp. droite) reliant les deux points finaux. C.Q.F.D.

Lemme 5.9. *L'application 2-résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(a_1, a_2; (-2^s))$ avec s pair et $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ est surjective.*

Démonstration. Par éclatement de zéro, le lemme 5.8 implique qu'il suffit de prouver que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle de ces strates. Nous prouvons ce résultat par récurrence sur le nombre (pair) de pôles d'ordre -2 . L'hypothèse de récurrence est que dans chaque strate avec s pair et $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ il existe une 2-différentielle dont les 2-résidus sont $(1, \dots, 1)$ qui possède un lien selle entre les deux zéros et un lien selle fermé reliant le zéro d'ordre maximal à lui-même.

Pour $s = 2$, il y a les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, -1; -2, -2)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(2, 2; -2, -2)$ à considérer. Des différentielles quadratiques dans ces strates avec 2-résidus $(1, 1)$ sont représentées dans la figure 36 en blanc. L'existence des liens selles comme ci-dessus est claire.

Supposons par récurrence qu'il existe une 2-différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec 2-résidus $(1, \dots, 1)$ et $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$. Si $a_2 \geq a_1$, nous construisons des différentielles quadratiques dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1+2, a_2+2; (-2^{s+2}))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2+4; (-2^{s+2}))$ satisfaisant à l'hypothèse de récurrence.

Pour ajouter 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal, nous coupons la différentielle le long du lien selle fermé γ connectant ce zéro à lui-même. Nous prenons un parallélogramme dont l'un des segments est donné par la période de γ et les autres arêtes sont les vecteurs 1. Puis nous collons des demi-cylindres infinis de circonférence 1 aux segments de longueur 1. Enfin nous collons les autres segments du parallélogramme aux bords de la surface. La différentielle obtenue à partir de la différentielle à gauche de la figure 36 est représentée à gauche de la figure 38. Pour ajouter 2 à l'ordre des deux zéros, il suffit de faire la même construction en coupant un lien selle entre les deux zéros. Cette construction est représentée à droite de la figure 38.

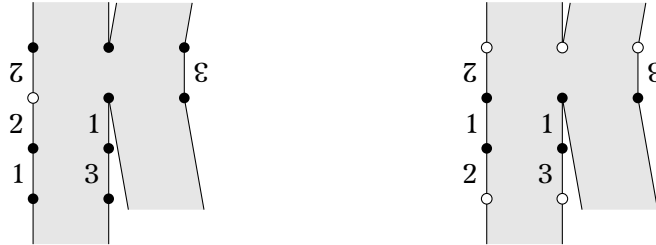


FIGURE 38. Différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(9, -1; (-2^4))$ (à gauche) et $\Omega^2\mathcal{M}_1(4, 4; (-2^4))$ (à droite) dont les 2-résidus sont $(1, 1, 1, 1)$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que toutes les strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ peuvent s'obtenir en ajoutant 2 à l'ordre des deux zéros ou 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal. C.Q.F.D.

Lemme 5.10. *L'application k -résiduelle des strates $\Omega^k\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ distinctes des strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(s+1, s-1; (-2^s))$ avec s pair est surjective.*

Démonstration. Si $k \geq 3$, l'éclatement des zéros et la couture d'anse (cf propositions 2.5 et 2.6) à partir des k -différentielles données par le lemme 5.7 donne la surjection pour toutes les strates avec $g \geq 1$.

Considérons le cas $k = 2$. Si $g = 1$, alors nous avons montré le résultat pour au plus deux zéros dans les lemmes précédents. Pour les strates avec $n \geq 3$ zéros, nous utilisons l'éclatement des zéros à partir des strates ayant deux zéros. Si $g \geq 2$, il suffit de montrer que l'image

de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_2(2s+4;(-2^s))$ avec s pair contient $(1, \dots, 1)$. En effet, si c'est le cas l'éclatement des zéros et la couture d'anse impliqueront le résultat pour toutes les strates. Pour cela, prenons une 2-différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s+4;(-2^{s+2}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1, -1, -1)$ (cette différentielle existe par le lemme 5.7). Nous formons une différentielle quadratique entrelacée en collant les deux pôles avec les résidus quadratiques -1 . Par la proposition 2.3, cette 2-différentielle entrelacée est lissable et la différentielle obtenue par lissage possède les propriétés souhaitées. C.Q.F.D.

Lemme 5.11. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s;(-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbb{C}^*)^s \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Rappelons que nous ne considérons que les différentielles quadratiques primitives. Sinon on pourrait simplement prendre le carré d'une différentielle abélienne dans $\Omega\mathcal{M}_1(s, (-1^s))$ qui a pour résidus $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Démonstration. D'après le lemme 5.8, il suffit de vérifier que les résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle de ces strates.

L'image de $\mathfrak{R}_2^1(4;(-2^2))$ ne contient pas $(1, 1)$ car sinon on obtiendrait une différentielle quadratique entrelacée lissable en collant ses deux pôles (voir le lemme 2.3). La 2-différentielle obtenue par lissage serait primitive dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(4)$, ce qui est absurde (voir [MS93]).

Supposons qu'il existe une 2-différentielle ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(2s;(-2^s))$ avec $s \geq 2$ dont tous les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$. Nous notons S la surface plate associée à ξ . Sans perte de généralité, on peut supposer que le cœur de S est dégénéré et contient $s+1$ liens selles distincts (voir la section 2.4). En coupant S le long de ces liens selles, nous obtenons l'union disjointe de s parties polaires quadratiques d'ordre 2 bordées par $2s+2$ segments.

Remarquons qu'aucun domaine polaire ne possède un bord formé d'un unique segment. Sinon pour que S ne soit pas singulière il faudrait que l'autre pôle bordé par ce lien selle ait un résidu quadratique strictement supérieur à 1. Donc les graphes d'incidence de S (voir section 2.4) sont de l'une des deux formes suivante.

- (1) Il existe un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- (2) Il existe deux sommets de valence 3 et les autres sont de valence 2.

Dans le graphe d'incidence de S , il y a des chaînes de sommets de valence 2. Pour tous ces domaines polaires, la somme des longueurs des liens selles est égale à 1. Donc dans ces chaînes, la période des liens selles est alternativement $\theta \in]0, 1[$ et $1 - \theta$. Nous pouvons enlever deux domaines polaires consécutifs de cette surface de la façon suivante. Nous coupons la surface S le long des deux liens selles de période θ . Puis nous oublions les deux 2-parties polaires et recollons les bords de la surface ainsi obtenue. La surface ainsi obtenue est encore primitive. Nous enlevons de S toutes les paires adjacentes avec deux liens selles jusqu'à obtenir une surface dite *réduite*.

Il suffit maintenant de montrer qu'il n'existe pas de surfaces réduites. Considérons tout d'abord le cas où l'un des sommets du graphe d'incidence est de valence 4. Les seuls graphes d'incidence possibles comportent un sommet d'où part deux boucles qui contiennent 0 ou 1 sommet de valence 2. Comme s est pair, le seul graphe d'incidence possible correspond à une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(4, (-2^2))$ avec résidus $(1, 1)$. Cela montre qu'aucune surface réduite possède ce graphe d'incidence.

Maintenant, nous considérons les surfaces réduites dont le graphe d'incidence possède deux sommets de valence 3. Dans ce cas deux types de graphes d'incidence sont possibles. L'un avec trois arêtes entre deux sommets et sur chaque arête 0 ou 1 sommet de valence 2. L'autre avec une arête entre deux sommets et une boucle à chaque sommet. La seule possibilité est que ces graphes aient 4 sommets, sinon le nombre de pôles serait impaire ou égal à 2. Donc il y a un sommet de valence 2 sur deux arêtes.

Considérons le premier graphe. Due à la présence des deux sommets de valence 2, les longueurs des connections de selle au bord des domaines polaires de valence 3 sont a, b, c et $a, 1 - b, 1 - c$ respectivement avec $a, b, c \in]0; 1[$. De plus, par hypothèse on a les égalités $a + b + c = 2 + a - b - c = 1$, ce qui implique que $a = 0$. Ce donne la contradiction.

Dans le second cas, il existe au moins une boucle qui contient un sommet. Comme la somme des longueurs des liens selles au bord de ce domaine polaire est 1, le troisième lien selle de ce domaine polaire est nul. Cela donne la dernière contradiction de cette preuve. C.Q.F.D.

Lemme 5.12. *L'image de $\mathfrak{R}_2^1(s + 1, s - 1; (-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbb{C}^*)^s \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Nous commençons par remarquer que l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(3, 1; -2, -2)$ ne contient pas $(1, 1)$. Sinon on pourrait former une différentielle entrelacée lissable en recollant les deux pôles doubles. La différentielle quadratique obtenue en la lissant serait dans $\Omega^2 \mathcal{M}_2(3, 1)$, qui est vide par [MS93].

Nous traitons le cas $s \geq 4$ par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2(s - 1, s + 1; (-2^s))$ avec pour résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$. Dans un premier temps nous simplifions la différentielle quadratique puis nous montrons que les différentielles quadratiques simplifiées n'existent pas.

Nous supposons que le cœur de la différentielle est dégénéré et qu'il y a donc $s + 2$ connections de selle horizontales (voir section 2.4). En coupant le long des liens selles la surface nous obtenons s parties polaires quadratiques bordées par au moins 2 segments. Les domaines polaires dont le bord est composé par strictement plus de deux segments sont appelés *spéciaux*. Les valences des sommets correspondants dans le graphe d'incidence peuvent être de la forme (6) , $(5, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 3, 3)$ ou $(3, 3, 3, 3)$.

Nous considérerons tout d'abord le graphe d'incidence simplifié défini dans la section 2.4. On utilisera le vocabulaire des graphes et des surfaces de manière interchangeable. Par exemple, la *valence* d'un pôle est la valence du sommet correspondant dans le graphe d'incidence. Les graphes d'incidence simplifiés possibles sont représentés dans la figure 39 (d'autres graphes à priori possibles seront écartés par des considérations générales).

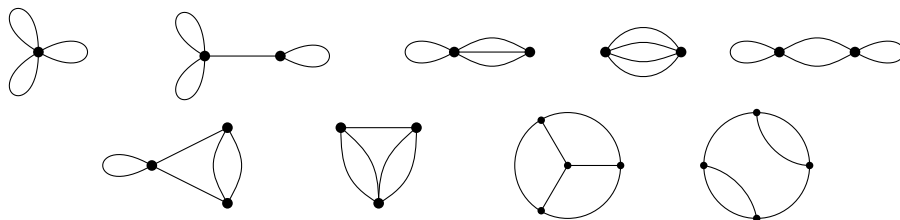


FIGURE 39. Tout les graphes d'incidence simplifiés des surfaces réduites

Commençons par donner une propriété importante des graphes d'incidence. Ces graphes ne peuvent pas contenir de boucle formée d'un nombre impair de sommets de valence 2. Sinon les longueurs des liens selles initial et final s'additionneraient à 1. Cela est impossible car au moins un autre lien selle borde ce domaine polaire spécial.

Cela nous permet d'exclure la possibilité d'un unique pôle spécial de valence 6. En effet, le seul graphe d'incidence simplifié possible est la fleur à trois pétales (voir la figure 39). Mais comme le nombre de pôles de la différentielle est par hypothèse pair, il y a au moins une pétale qui contient un nombre impair de sommets de valence 2.

Une première façon de simplifier la surface est d'enlever une paire de pôles voisins de valence 2. Cette opération est décrite dans la preuve du lemme 5.11. Remarquons qu'elle diminue l'ordre des deux zéros par 2 ou seulement l'un des deux par 4. Afin de rester dans une strate du type $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s + 1, s - 1; (-2^s))$, nous autorisons cette opération si et seulement si

les liens selles connectent les deux zéros entre eux ou le zéro d'ordre maximal à lui même. Remarquons qu'après avoir enlever une paire avec des liens selles connectant au zéro d'ordre maximal, celui-ci devient le zéro d'ordre minimal. Ainsi en jouant au ping-pong, on pourra enlever de nombreuses paires de pôles. En particulier, après avoir enlever toutes les paires de sommets possibles, les paires restantes sont bordées par des liens selles entre le zéro d'ordre minimal. À partir de maintenant, nous considérons uniquement des surfaces où il n'est pas possible d'enlever une paire de pôles.

Nous montrons maintenant qu'il n'est pas possible d'avoir une boucle dans le graphe d'incidence simplifié à un sommet de valence 3. Comme nous l'avons remarqué, le nombre de sommets de valence deux sur cette boucle doit être pair. Si ce nombre est zéro, alors nous aurions un zéro d'ordre -1 sur cette surface. Mais ce cas ne se présente dans aucune des strates considérées. Si le nombre de sommets sur cette boucle était strictement positif, alors le pôle de valence 3 serait bordé uniquement par les connections de selles entre le zéro d'ordre minimum et lui même. La connexion de selle se situe entre ce domaine polaire un domaine polaire distinct. Cela implique qu'au moins deux autres segments au bord d'un autre domaine polaire spécial possèdent ce zéro à une extrémité. Nous faisons maintenant une analyse au cas par cas.

Dans le cas $(5, 3)$ cela implique que la contribution angulaire des pôles spéciaux au zéro d'ordre inférieur est d'au moins 5π . Ainsi leurs contributions angulaires au zéro d'ordre maximal est d'au plus 3π . Comme l'extrémité de trois des cinq segments du bord du domaine de valence 5 contiennent le zéro d'ordre minimal, au plus une boucle au sommet de valence 5 peut être bordée par des liens selles connectant le zéro maximal à lui même. Comme il existe au maximum un pôle de valence deux sur cette boucle, l'ordre du zéro minimal est supérieur ou égal à celui du zéro d'ordre maximal. Cela donne la contradiction souhaitée. Dans les deux autres cas $(4, 3, 3)$ et $(3, 3, 3, 3)$ une analyse similaire aboutit à la même contradiction.

Nous poursuivons en montrant qu'il existe au plus un pôle de valence 2 sur une arête du graphe simplifié. Supposons qu'il existe une arête avec plus de 2 sommets. Les liens selles correspondants relient le zéro d'ordre minimal à lui même. Soit cette arête connecte un pôle de valence 3 à un autre sommet spécial. Soit c'est une boucle à un sommet de valence 5 ou 4. On vérifie facilement que dans les deux cas cela entraîne que le zéro d'ordre minimal est l'extrémité de liens selles de deux sommets du graphe d'incidence simplifié. Cela entraîne, de manière analogue au paragraphe précédent, que la contribution angulaire au zéro d'ordre minimal est plus grande que celle au zéro d'ordre maximal. On en déduit la même contradiction. A partir de maintenant, nous considérerons des graphes d'incidence avec 0 ou 1 sommet de valence 2 sur les arêtes du graphe simplifié.

Considérons le cas où les pôles spéciaux sont de valences $(5, 3)$. Dans ce cas, deux graphes d'incidence simplifiés sont a priori possibles (voir la figure 39). Le premier a une boucle à un pôle de valence 3 et est donc impossible. Le second graphe a trois arêtes entre les deux sommets spéciaux et une boucle au sommet de valence 5. Comme nous considérons des strates avec un nombre pair supérieur ou égal à 4 pôles, il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur les arêtes. Si il y en avait 4, alors il y aurait un sommet sur la boucle, ce qui est impossible. Donc il y a forcément deux sommets sur les arêtes joignant les deux sommets spéciaux. Dénotons par $0 < a, b, c < 1$ les longueurs des connections de selles bordant le pôle de valence 3. Les longueurs des liens selles au pôles de valence 5 seront donc $a, 1 - b, 1 - c$ et $2d$ avec $d > 0$. Comme par hypothèse $a + b + c = 1$ on a $a + 2 - b - c + 2d = 1 + 2a + 2d > 1$. Ce qui contredit le fait que le résidu quadratique à ce pôle est 1.

Dans le cas $(4, 4)$, il y a deux graphes simplifiés possibles. Considérons tout d'abord le graphe avec 4 arêtes entre les deux sommets spéciaux. Il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur ces arêtes. Les longueurs des liens selles à un pôle spécial sont $0 < a, b, c, d < 1$ avec

$a + b + c + d = 1$. À l'autre pôle spécial, il y a au moins deux longueurs de la forme $1 - a, 1 - b$. Donc le résidu à ce pôle est strictement supérieur à 1.

Le second graphe simplifié possède deux boucles et deux arêtes connectant les pôles spéciaux (voir la figure 39). La seule possibilité est qu'il y ai deux sommets non spéciaux sur les arêtes connectant les pôles spéciaux. On obtient comme précédemment une contradiction en considérant les longueurs des liens selles.

Nous définissons maintenant une nouvelle opération sur des pôles voisins appelée *fusion*. Prenons deux pôles d'ordres -2 connectés par au moins un lien selle. Nous pouvons alors remplacer ces deux pôles par un pôle d'ordre 4, voir la figure 40. Remarquons que cette opération ne modifie ni l'ordre, ni le résidu des autres singularités. De plus, la différentielle ainsi modifiée reste primitive. Enfin, le résidu du pôle d'ordre -4 ainsi créer est nul.

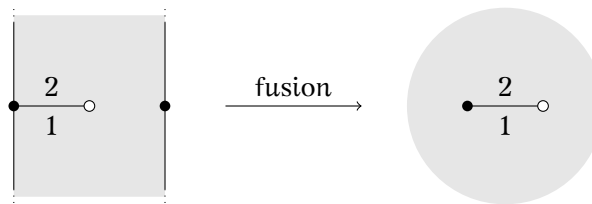


FIGURE 40. La fusion de deux pôles d'ordre -2 en un pôle d'ordre -4 .

Maintenant, nous traitons le cas où les pôles spéciaux sont de valences $(4, 3, 3)$. Il n'y a que deux graphes d'incidence simplifiés a priori possibles (voir la figure 39). Pour le graphe qui à une boucle au pôle de valence 4, il peut y avoir 1, 3 ou 5 pôles supplémentaires de valence 2. Ce dernier cas est impossible car il y aurait un sommet de valence 2 sur la boucle. Si on avait un sommet supplémentaire, alors on pourrait fusionner les pôles par paires afin d'obtenir une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, 3; -4, -4)$ dont les résidus soient nuls. Nous avons montré qu'une telle différentielle n'existe pas dans le lemme 5.6. Donc la différentielle originale ne peut pas exister. Les cas avec trois pôles supplémentaires se traite de manière similaire par fusion des pôles.

Dans le cas du graphe d'incidence simplifié qui ne possède pas de boucle, nous pouvons avoir 1, 3 ou 5 pôles de valence 2 supplémentaires. Le cas avec 5 pôles est impossible à cause des longueurs des connections de selle. En effet, les longueurs des connections de selle entre le pôle de valence 4 et l'un des pôles de valence 3 sont a et b avec $a + b > 1$ à un pôle, et $1 - a$ et $1 - b$ avec $2 - a - b < 1$ à l'autre. Cela est clairement impossible. Enfin les cas avec 1 et 3 sommets de valence 2 peuvent se traiter avec la fusion en se ramenant au lemme 5.6.

Pour conclure, nous considérons le cas des graphes dont les sommets spéciaux sont de valence $(3, 3, 3, 3)$. Les graphes possibles sont représentés dans la figure 39. Nous considérons tout d'abord le graphe complet K_4 . Pour 0, 2 or 4 pôles de valence deux sur les arêtes, l'impossibilité peut se montrer en se ramenant au lemme 5.6 par fusion. S'il y a six pôles de valence 2, nous regardons les longueurs des liens selles aux pôles spéciaux. Les longueurs de celles bordant le sommet central sont de longueur a, b et $1 - a - b$. Les longueurs des liens selles correspondants bordant les autres sommets spéciaux sont $1 - a, 1 - b$ et $a + b$. Considérons le pôle avec le lien selle de longueur $a + b$. Il a un autre lien de selle de longueur c . La longueur du lien selle correspondant sur l'autre pôle spécial (disons celui avec le lien selle de longueur $1 - a$) est $1 - c$. Le troisième lien selle de ce pôle est de longueur $a + c - 1$. En continuant notre voyage autour du cercle, nous trouvons que la longueur des liens selles du pôle d'où nous sommes parti sont $a + b, c$ et $3 - a - b - c$. Comme la somme est 3 cela donne la contradiction souhaitée.

Enfin nous considérons le graphe en forme de balle de tennis. Comme précédemment, les cas où il y a 0, 2 ou 4 pôles de valence 2 supplémentaires peut être traité par fusion.

Pour 6 pôles supplémentaires, une analyse de la longueur des liens selles similaire au cas du graphe K_4 , permet d'obtenir la dernière contradiction de cette preuve. C.Q.F.D.

5.3. Pluridifférentielles d'aires finies : preuve du théorème 1.4. Dans ce dernier paragraphe nous montrons que les strates primitives $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ en genre $g \geq 1$ sont vides si et seulement si $\mu = \emptyset$ ou $\mu = (1, -1)$ en genre 1 ou $\mu = (4)$ et $\mu = (3, 1)$ pour $k = 2$. Toutes les k -différentielles de type (\emptyset) sont la puissance k ième d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. De plus, le théorème d'Abel implique que les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$ sont vides. Pour les deux strates quadratiques vides de genre 2, nous renvoyons à [MS93]. Notre but est donc de montrer que toutes les autres strates sont non vides.

En genre un, il existe des k -différentielles de type μ pour tout $\mu \neq (1, -1)$. Supposons que $\mu := (a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$, il reste à montrer que certaines d'entre elles sont primitives. Étant donné un tore X , il existe un diviseur $D := \sum a_i z_i$ sur X linéairement équivalent à zéro tel que pour tout diviseur d des a_i , le diviseur $\sum \frac{a_i}{d} z_i$ n'est pas linéairement équivalent à zéro (voir par exemple [Boi15]). La k -différentielle ayant pour diviseur D est clairement primitive.

Soit $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de genre $g \geq 2$ avec $a_i > -k$. Si (a_1, \dots, a_n) est différent de $(4g - 4)$ et $(2g - 1, 2g - 3)$ dans le cas quadratique, alors, par le théorème 1.2, la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; ((-2k)^{g-1}))$ contient une différentielle primitive (X_0, ω_0) dont tous les k -résidus sont nuls. On obtient une k -différentielle entrelacée en attachant la puissance k ième d'une différentielle holomorphe sur un tore aux pôles de X_0 . Cette pluridifférentielle entrelacée est lissable par le lemme 2.4. Les lissages sont clairement des k -différentielles primitives. Donc ces strates sont non vides.

Enfin il reste le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_g(2g - 1, 2g - 3)$. En utilisant l'éclatement de zéros, il suffit de montrer que la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ est non vide pour tout $g \geq 3$. Nous savons que $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4(g - 1); (-4^{g-2}))$ contient une différentielle primitive sans résidus quadratiques aux pôles. On obtient une différentielle quadratique entrelacée en attachant à chaque pôle le carré d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. Les différentielles quadratiques obtenues par lissage sont dans $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ comme souhaité.

6. APPLICATIONS.

Nous donnons quelques applications élémentaires de nos résultats. Une connaissance des notions introduites dans [BCGGM18] et [BCGGM19] est recommandée.

6.1. Limites des points de Weierstraß : preuve de la proposition 1.15. L'étude des limites des points de Weierstraß dans la compactification de Deligne-Mumford a explosé grâce aux travaux d'Eisenbud et Harris sur les séries linéaires limites (voir e.g. [EH87]). L'une des limites de leur méthode est de se restreindre aux courbes de type compact. Esteves et Medeiros l'ont étendue aux courbes ayant deux composantes dans [EM02]. Nos résultats et la description de la compactification de la variété d'incidence de [BCGGM18] permettent une description complète (en théorie) des limites de points de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$.

Nous montrons tout d'abord que l'adhérence du lieu de Weierstraß ne rencontre pas celui des courbes stables X où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué (voir le théorème 3.1 de [EH87]). Ces courbes sont figurées à gauche de la figure 41.

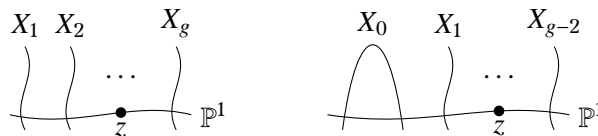


FIGURE 41. Les courbes pointées considérées dans la proposition 1.15.

L'adhérence du lieu de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ coïncide avec la projection de la compactification de la variété d'incidence de $\Omega\mathcal{M}_g(g, 1, \dots, 1)$ (voir [BCGGM18, Section 3.6]). D'après le théorème 1.3 de l'article loc. cit., il suffit de montrer qu'il n'existe pas de différentielle entrelacée lissable sur une courbe semi-stablement équivalente à X .

Soit ξ une différentielle entrelacée sur (une courbe semi-stablement équivalente à) X . La restriction ξ_0 de ξ à \mathbb{P}^1 possède un zéro d'ordre supérieur ou égal à g . De plus, ξ_0 possède une singularité d'ordre supérieure ou égale à -2 (et distinct de -1) aux nœuds entre \mathbb{P}^1 et une courbe elliptique. On vérifie facilement que l'inégalité (1.5) est satisfaite par ξ_0 . Le théorème 1.5 implique qu'au moins deux pôles possèdent des résidus non nuls. La *condition résiduelle globale* de la définition 1.2 de [BCGGM18] n'est donc pas satisfaite et ξ n'est pas lissable.

Maintenant, nous montrons que l'adhérence du lieu de Weierstraß coupe le lieu de $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ donné de la façon suivante. Ces courbes sont formées d'un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué attaché à $g-2$ courbes elliptiques X_1, \dots, X_{g-2} par un unique point et à une courbe elliptique X_0 par deux points. Elles sont représentées à droite de la figure 41.

Il suffit construire une différentielle entrelacée lissable de type $(g, (1^{g-2}))$ sur une de ces courbes. Sur toutes les courbes elliptiques, on prend la différentielle holomorphe. Sur la courbe projective, on prend une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(g, (1^{g-2}); (-2^g))$ avec $g-2$ résidus nuls. Une telle différentielle existe par le théorème 1.5. On colle alors la courbe elliptique X_0 aux deux pôles dont les résidus ne sont pas nuls. Les autres courbes elliptiques sont collées aux pôles dont les résidus sont nuls. On vérifie que cette différentielle entrelacée est lissable grâce au théorème 1.3 de [BCGGM18].

6.2. Éclatement de zéros : preuve de la proposition 1.16. L'idée de scinder les singularités coniques d'une métrique plate est ancienne. Dans le cas des métriques induites par une différentielle abélienne, une belle construction a été proposée en autres par Eskin, Kontsevich, Masur et Zorich (voir [EMZ03, §8.1]). En revanche, pour les différentielles quadratiques Boissy, Lanneau, Masur et Zorich ont remarqué qu'une telle construction peut ne pas être réalisable de manière locale (voir [MZ08]). La compréhension de la variété d'incidence des strates de pluridifférentielles permet de comprendre ce phénomène (voir [BCGGM19, Example 7.1]). Nous pouvons maintenant caractériser les cas où l'éclatement d'une singularité conique n'est pas possible localement.

L'éclatement d'un zéro d'ordre $a > -k$ d'une k -différentielle ξ en n zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) correspond au lissage d'une k -différentielle entrelacée. Cette k -différentielle entrelacée est constituée d'une k -différentielle ξ_0 sur \mathbb{P}^1 avec des zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) et un pôle d'ordre $-a-2k$ attachée au zéro d'ordre a de ξ (voir la proposition 2.5). Cette k -différentielle entrelacée est lissable localement si et seulement tous les k -résidus de ξ_0 sont nuls. L'éclatement est possible localement si et seulement s'il existe une k -différentielle de genre zéro de type $(a_1, \dots, a_n; -2k-a)$ dont tous les k -résidus sont nuls. La proposition 1.16 est alors une conséquence directe du théorème 1.10 et de l'équation (2.1).

6.3. Cylindres dans une surface plate : preuve de la proposition 1.17. Naveh ([Nav08]) nous apprend que le nombre maximal de cylindres disjoints dans une surface de $S := \Omega\mathcal{M}_g(m_1, \dots, m_n)$ est $g+n-1$. Nous décrivons les périodes possibles des circonférences de ces cylindres. On fixe $(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$ pour le reste de cette section.

Supposons qu'il existe une différentielle ω de S qui possède une famille de t cylindres disjoints de circonférences respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Nous montrons l'existence d'une différentielle stable dont les zéros sont d'ordres (a_1, \dots, a_n) avec des pôles simples aux nœuds dont les résidus sont $\pm\lambda_i$. Coupons ω le long d'une d'une géodésique périodique dans chaque cylindre. Nous pouvons alors remplacer les deux demi-cylindres obtenus par deux demi-cylindres infinis de même circonférence. On obtient donc une différentielle entrelacée avec

des pôles simples aux nœuds. De plus, les résidus de ces pôles sont égaux à plus ou moins la circonférence des cylindres. On en déduit le sens direct de la proposition 1.17.

La direction réciproque est une application directe du lissage des nœuds des différentielles stables avec pôles simples aux nœuds (voir le lemme 2.3).

Dans le cas des strates minimales, ces différentielles entrelacées sont irréductibles. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6.1. *Le t -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$ est un vecteur constitué des périodes des circonférences de cylindres disjoints d'une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_g(2g-2)$ si et seulement si le $2t$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_t, -\lambda_1, \dots, -\lambda_t)$ est dans l'image de $\mathfrak{R}_{g-t}(2g-2; (-1^{2t}))$.*

Nous énonçons maintenant la proposition 1.17 dans le langage des représentations en graphe développé dans [Tah18]. L'idée est de considérer le graphe dual de la différentielle entrelacée de cette proposition. Le théorème 2.3 de [Tah18] permet de caractériser de façon combinatoire les graphes qui apparaissent pour une strate donnée. Nous allons les enrichir de façon à prendre également en compte les circonférences des cylindres.

Soit $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes. Une représentation en graphe enrichie de niveau u $(G, f_0, \dots, f_u, g_0, \dots, g_u)$ est définie comme suit. Le graphe G est connexe avec $u+1$ sommets de valences v_0, \dots, v_u et t arêtes (il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets). Les entiers naturels g_0, \dots, g_u sont des poids associés à chaque sommet. Les nombres a_1, \dots, a_n sont répartis en $u+1$ familles f_i telles que :

- (i) il y a au moins un nombre parmi (a_1, \dots, a_n) dans chaque famille f_i ;
- (ii) chaque somme $\sigma(i)$ des éléments de f_i vérifie $\sigma(i) + v_i = 2g_i - 2$;
- (iii) aucune arête ne déconnecte G .

En déroulant les définitions on montre que la proposition 1.17 s'énonce de la façon suivante.

Proposition 6.2. *Soient $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*)^t$. Il existe une différentielle dans S qui possède une famille de t cylindres disjoints dont les circonférences sont λ si et seulement s'il existe une représentation en graphe G avec t arêtes et un marquage de chaque demi-arête par les éléments de $(\lambda, -\lambda)$ de telle façon que les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- i) Les demi-arêtes constituant une arêtes sont marqués par λ_i et $-\lambda_i$;
- ii) les poids λ_{j_i} des demi-arêtes adjacentes au sommet i doivent être dans l'image de l'application $\mathfrak{R}_{g_i}(f_i, (-1^{v_i}))$.

RÉFÉRENCES

- [BCGGM18] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Compactification of strata of abelian differentials*. Duke Math. J. 167.12 (2018), p. 2347-2416.
- [BCGGM19] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Strata of k -differentials*. À paraître dans Algebraic geometry (2019).
- [Boi15] Correntin BOISSY. *Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials*. Comment. Math. Helv. 90.2 (2015), p. 255-286.
- [Dia00] Homero DIAZ-MARIN. *Meromorphic quadratic differentials with prescribed singularities*. Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Sér. 31.2 (2000), p. 189-204.
- [EH87] David EISENBUD et Joe HARRIS. *Existence, decomposition, and limits of certain Weierstrass points*. Invent. Math. 87 (1987), p. 495-515.
- [EMZ03] Alex ESKIN, Howard MASUR et Anton ZORICH. *Moduli spaces of Abelian differentials : the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 97 (2003), p. 61-179.
- [EM02] Eduardo ESTEVES et Nivaldo MEDEIROS. *Limit canonical systems on curves with two components*. Invent. Math. 149.2 (2002), p. 267-338.

- [KZ03] Maxim KONTSEVICH et Anton ZORICH. *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*. Invent. Math. 153.3 (2003), p. 631-678.
- [Lan08] Erwan LANNEAU. *Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41.1 (2008), p. 1-56.
- [MS93] Howard MASUR et John SMILLIE. *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*. Comment. Math. Helv. 68.2 (1993), p. 289-307.
- [MZ08] Howard MASUR et Anton ZORICH. *Multiple saddle connections on flat surfaces and the principal boundary of the moduli spaces of quadratic differentials*. Geom. Funct. Anal. 18.3 (2008), p. 919-987.
- [Nav08] Yaron NAVEH. *Tight upper bounds on the number of invariant components on translation surfaces*. Isr. J. Math. 165.1 (2008), p. 211-231.
- [Rey89] Eric REYSSAT. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Boston, MA etc. : Birkhäuser, 1989, p. vii + 166.
- [Sai10] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010, p. 544.
- [Str84] Kurt STREBEL. *Quadratic differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5. Berlin etc. : Springer-Verlag. XII, 184 p. 1984.
- [Tah18] Guillaume TAHAR. *Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order*. Geom. Dedicata 196.1 (2018), p. 145-186.
- [Tro86] Marc TROYANOV. *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*. Enseign. Math. (2) 32 (1986), p. 79-94.

(Quentin Gendron) INSTITUT FÜR ALGEBRAISCHE GEOMETRIE, LEIBNIZ UNIVERSITÄT HANNOVER, WELFENGARTEN 1, 30167 HANNOVER, GERMANY

Current address: Centro de Ciencias Matemáticas-UNAM, Antigua Car. a Pátzcuaro 8701, Col. Ex Hacienda San José de la Huerta, Morelia, Mich., México

Email address: gendron@matmor.unam.mx

(Guillaume Tahar) INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - UMR CNRS 7586

Email address: guillaume.tahar@gmail.com